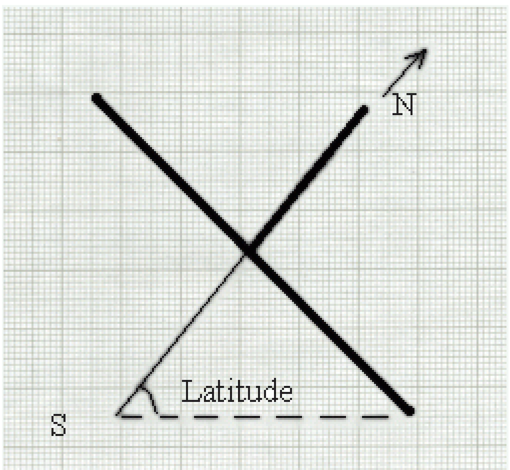
Tillverkning av ett solur för trädgården

Seppo Nurmi, Järfälla, 2003-09-25, senast uppdaterad 2009-09-21.

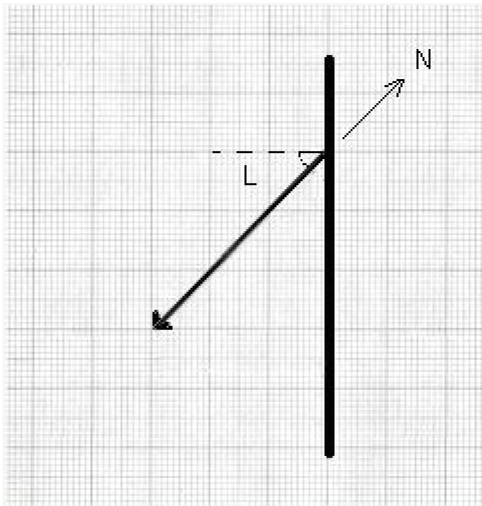
Några olika typer av solur

Vi betraktar först ett ekvatorialt solur, där timskivan är parallell med jordekvatorn. Timlinjerna ligger då med jämna mellanrum, vinkeln mellan dem är 360/24 = 15 grader. Som en visare tjänstgör en simpel stav som pekar mot den astronomiska nordpolen (nära Polstjärnan, som finns där även på dagen fast den inte syns då), och den är således i rät vinkel mot timskivan. Nedan en schematisk bild sett rakt från sidan (samt ett foto av ett typiskt sådan solur som finns att köpa).



Om timskalan ritas på en skiva blir ett sådant solur svårt att använda, eftersom solen på dagtid ibland belyser dess undersida. Man skulle vara tvungen att förlänga visarpinnen så den går genom skivan och kan kasta en skugga på undersidan också. Därtill måste man rita timskalan på båda sidorna av skivan. Det kan också vara lite knepigt att se vad uret visar när skuggan faller på undersidan. Av denna anledning är ett ekvatorialt solur vanligtvis gjort som en stav runt vilken man har fastsatt en ring med timskalan på insidan, där stavens skugga faller. Den är den vanliga modellen av kopparplåt och stora ringar som finns att köpa lite varstans. Förvisso en lätthanterad modell som går att ställa in för vilken ort som helst, men också lite tråkig eftersom den är så vanlig. I denna lilla skrift beskriver jag en en något mer utmanande modell, som ändå är ganska lätt att tillverka, nämligen ett horisontellt solur.

Jag ska först lite kort beröra en annan modell, nämligen ett vertikalt solur, som finns i bilderna nedan. Jag har nämligen fått frågor om den. Jag har dock inte försökt tillverka eller beräkna en sådan. I bilden är L ortens latitud, och visarpinnens förlängning (genom väggen snett uppåt) pekar mot norra himmelspolen N (mot Polstjärnan). Observera att väggen i den högra bilden nedan inte ligger öst-västlig riktning, vilket gör att pilen pekar snett "åt sidan", eftersom den alltid måste ligga exakt på jordaxelns riktning. Det är en av komplikationerna med solur placerade på väggen, att man i beräkningarna måste ta hänsyn till väggens riktning mm. Detaljer.



Vertikala solur, som oftast placeras på väggen, förekommer i kyrkor och andra offentliga byggnader. Men ett typ av solur, som det i bilden, fungerar inte så bra för nära nordpolen, för visaren blir ju nästan parallell med väggen. Inte heller fungerar den vid ekvatorn, där ju skuggan knappt når en vertikal vägg. Då använder man företrädesvis en typ av solur där det inte är vinkeln, utan skuggans längd som anger tiden.

Allra bäst fungerar vertikala solur vid Syd- och Mellaneuropeiska breddgrader, vilket förklarar varför de är vanligare där än här uppe i Norden. Här i Norden är det, som antytts, det horisontella soluret som fungerar bäst. Den är också lättare att beräkna då ett horisontellt plan alltid ligger på samma sätt, nämligen parallellt med jordytan, och inte riktad i olika möjliga vädersträck som ett vertikalt vägg.

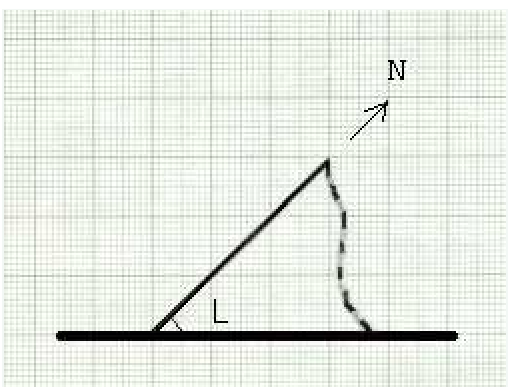
En till nackdel är att ett vertikalt solur bara kan visa tid knappt 12 timmar, medan vår nordiska sommardag är mycket längre, i nordligaste delen av landet 24 timmar faktiskt. Man kan kringgå denna 12 timmars begränsning genom att ha solur på fler väggar runtomkring byggnaden. Det förekommer också, men varje separat solur kräver sin egen konstruktionsberäkning baserad på väggens riktning, och urtavlorna blir helt olika.

De beräkningar som jag presenterar nedan för horisontella solur stämmer förstås inte för en vertikal en. Vinklarna för solen och skuggan blir ju helt andra. Det bästa tipset för tillverkning av ett vertikalt solur är att göra en modell, placera den rätt riktad på den väggen där den ska vara, och sedan följa klockan och markera timmarna.

Ett horisontellt solur

Ett horisontellt solur ställer man horisontellt med jordytan, som namnet säger. Vid beräkningarna utgår man från det att de horisontella timlinjerna blir projektioner av de ekvatoriala timlinjerna, när de projiceras på horisontalplanet. Detta å sin sidan beror på hur mycket jordytans plan avviker från ekvatorplanet, vilket är samma vinkel som ortens breddgrad. Timskalan blir då beroende av ortens breddgrad (latitud), och måste beräknas efter solurets geografiska placering. Ett sådant här solur är avsedd till att bli fastmonterat och kan inte flyttas till andra orter, i alla fall inte alltför många mil i nord-sydlig rikting. Avvikelserna blir dock inte så väldigt stora, och ganska små solur kan nog flyttas ganska långt utan nämnvärd avvikelse. Utmaningen i konstruktionen ligger närmast i vetskapen att man har räknat urtavlan rätt för orten, och att man i princip, om mer konstruktions-tekniska förutsättningar tillåter, kan göra ett solur som inte avviker mer än några minuter från rätt tidsvisning.

Naturligtvis måste man också ta i hänsyn visarens form vid beräkning av vart skuggan faller. Eller snarare, man väljer till visare en sådan form som förenklar både kalkyler och konstruktion. Till exempel en vertikal stav som visare skulle kräva rätt komplicerade beräkningar, uret skulle bli kalenderberoende så att timskalan eller visarens läge måste kontinuerligt justeras efter datum. Den enklaste och mångsidigaste lösningen är i stället en sned pinne, eller någorlunda triangelformad visare med en rak sned kant, som pekar mot astronomisk nordpol. Ett sådant solur ger rätt tid (soltid) på en och samma timskala under alla årets dagar utan ytterligare justeringar.



En principskiss för ett horisontellt solur. N i bilden syftar riktningen till himmels-nordpolen (ungefär mot Polstjärnan), visarens vinkel L blir då lika mycket i grader som ortens breddgrad (latitud). Den ser man lämpligen på en karta t.ex.

Här nedanför är en bild av ett horisontellt solur i verkligheten. Som urtavla togs här en naturlig skifferplatta för att skapa karaktären av ett "fornfynd". Trots stenens skrovlighet och ojämnheter klarar den en tidsnoggrannhet på bättre än 10 minuter. Visaren är av samma slags sten. Fram- och underkanten är sågade till vinkeln 59,3 grader, vilket motsvarar Stockholms breddgrad. Den är fastsatt med fästmassa typ plastisk sten och förstärkt med metall-piggar (bitar av mässingsspik) i borrade hål i stenen undertill.

Soluret här vilar på ett par kantstenar grävda en bit in i marken. Det här uret är så pass tungt så det håller sig på plats utan att sättas fast. Soluret i bilden visar ca. 9:25 på morgonen lokal sann soltid, medan det är 10:13 enligt klockor som är ställda i svensk och mellaneuropeisk sommartid.

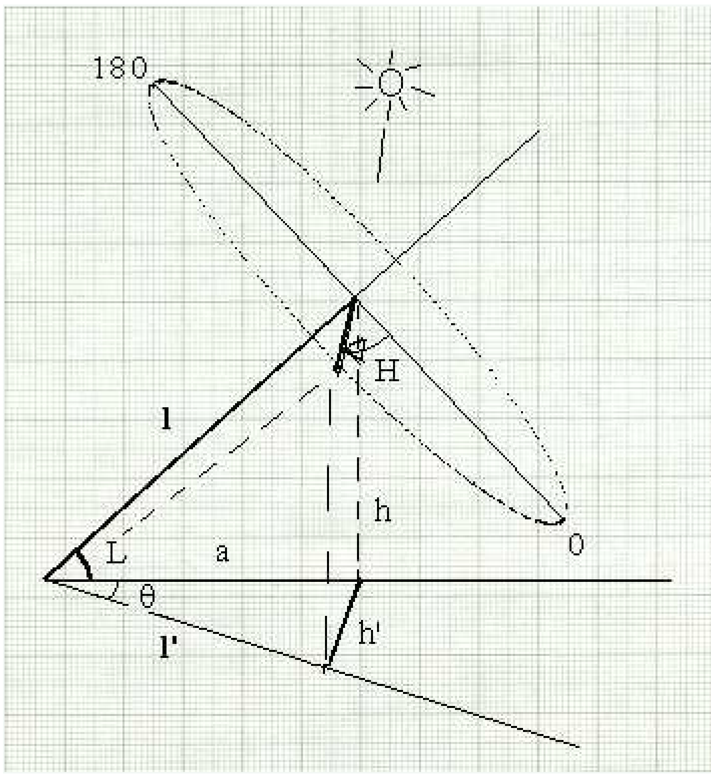
Skiffer är ett hårt sten som stålverktyg inte biter på, visade det sig, därför behövdes en kakelsåg med diamantskiva för att tillverka visaren. Timlinjerna graverades med ett handverktyg och stållinjal. Det ritverkyget som visade sig bäst bita på stenen var en liten trekantig färgskrapa av volframkarbid. Visarens sidor behövde här också slipas med en elslipmaskin och smirgelpapper för att få fram vassa och raka kanter framtill. Visarens utformning, dess framkant och framvinkel, är kritisk för noggrann tidsangivelse, den tidsvisande skuggan kastas ju av visarens sneda raka framkanter. Vill man komma lättare undan bör man välja ett mer lättbearbetat material, huvudsaken är att det är väderbeständigt. Jag har även sett solur av trä som fungerat utmärkt.

Teori

Nedan en schematisk bild som grund för kalkylerna. (Om det här känns för teoretiskt hoppa över till nästa rubrik.) Vi utgår från riktningen mot nord och kallar den för noll-vinkeln (kl, 0 eller 24.00 på natten). I bilden är skuggans vinkel till nordriktningen, som motsvarar en viss timvinkel dvs en tidsangivelse i timmar. L betecknar latitud-vinkeln från horisonten, lika stor som ortens breddgrad, den riktningen pekar snett upp i norr mot himmelspoolen. H är solens position på himmelen, angiven som timvinkel från norr räknat.

Denna senare vinkel H är i själva verket timvinkeln i det ekvatoriala soluret som behandlades ovan; den ekvatoriala ringen är antydd som en prickad cirkel i bilden: 0

motsvarar mitt på natten, kl 12 på dagen är solen i söder och timvinkeln är 180 grader; kl 6 på morgonen är solen i öst och H = 90 grader; kl 18 på kvällen är solen i väst och H = 270 grader osv. Nu ska vi alltså beräkna timlinjerna för ett horisontellt solur, där skuggan faller på ett horisontellt plan. Det behövs lite trigonometri för att räkna om från den ekvatoriala jämna skalan till den horisontella som inte blir alldeles jämn.



$$h = l \cdot \sin L$$

$$a = l \cdot \cos L$$

$$\tan\theta = (\sin L)\ (\tan H)$$

En timme på den ekvatoriala ringen motsvarar 15 grader, och en minut motsvaras av 15/60 = 1/4 grader, i beräkningarna används radianer, vilket är det rent matematiska vinkelmåttet, och förhåller sig till grader på följande sätt:

$$1grad = \frac{\pi}{180}\ radianer = 0.01745\ radianer$$

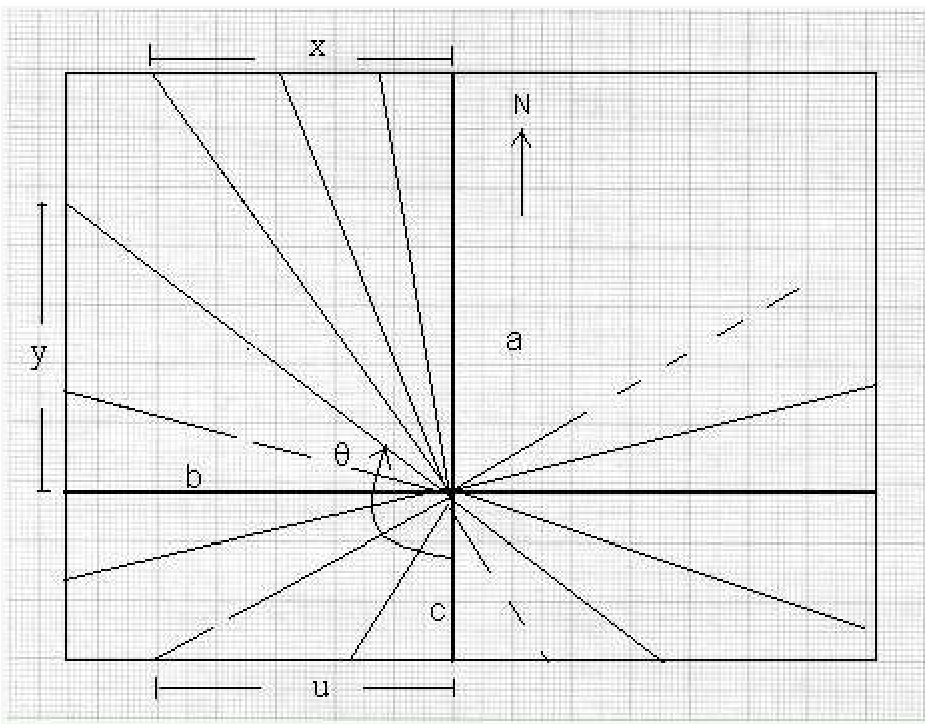
Här betecknar L geografisk latitud angiven i nordliga breddgrader. Till exempel Stockholms latitud:

$$L = 59.33\ grader = 59.33 \cdot \frac{\pi}{180}\ radianer = 1.0355\ radianer$$

I beräkningarna till det här soluret tar vi inte hänsyn till sk. anomalier, dvs. ljusets böjning i atmosfären, och avvikelser som beror på att jordbanan är en ellips mm., sådant som man måste göra med astronomiska instrument. När det gäller solur känns det lite överdrivet, det kanske är just sann soltid man vill följa, det finns ju inga ur som visar det annars. Bortsett från sommartidens timme som tillkommer, så är differensen från normaltid sällan större än en halvtimme, och vill man räkna om till normaltid så är det bara lite enklare huvudräkning som krävs. Mer om det längre fram.

Kalkyler och ritningar

I praktiken är det svårt att exakt rätt rita en vinkel given i grader, det är mycket enklare om man tar vinkelns tangent och ritar timlinjen med hjälp av en linjal och rätvinkliga trianglar. På en pappersark har man alltid tillgång till rätvinkliga trianglar med sidorna längs papperskanten och timlinjen som hypotenusan (den sneda sidan) av triangeln. Se nedanstående figur. Utgångspunkten för linjerna är det stället där visarens nedre spets är tänkt ligga, där överkanten av visaren ska möta urtavlans plan. Baslinjerna är nord-sydlig och öst-västlig timlinje.



$$x = -a \cdot \tan\theta$$

$$y = -\frac{b}{\tan\theta}$$

$$u = c \cdot \tan\theta$$

Ovan är hänsyn tagen också att den trigonometriska tangentfunktionen byter tecken i urtavlans varje kvartal. Blir resultatvärdet negativt mäts det åt motsatt håll från respektive baslinje. (Det gör inte så mycket om läsaren inte känner sig hemmastadd med trigonometri och tangentfunktionen, jag har fixat en Excel-ark som sköter det hela med beräkningarna.) Man räknar värden längs vertikala eller horsiontella kanter beroende på var timlinjen ska skära papperskanten, och mäter och markerar på kanten. Timlinjerna ritas sedan med en linjal från timskalans mittpunkt till markeringen på papperskanten. På så sätt kan man lätt rita alla timlinjerna med en god noggrannhet på pappersarken, vilket sedan används som en mall till solurets timskala.

(I en tidigare version av denna sida hade jag bilden spegelvänd, vilket jag inte hade märkt av den enkla anledningen att jag själv ritade på transparent papper, och vände pappret när jag överförde den andra halvan av urtavlan. Det är mer pedagogiskt rätt att rita bilden som den ser ut nu, så att vinkeln θ följer solens skenbara rörelseriktning på himlen.)

Beräkningarna görs separat på en excel-ark: http://home.swipnet.se/sepnur/sci/solur.xls

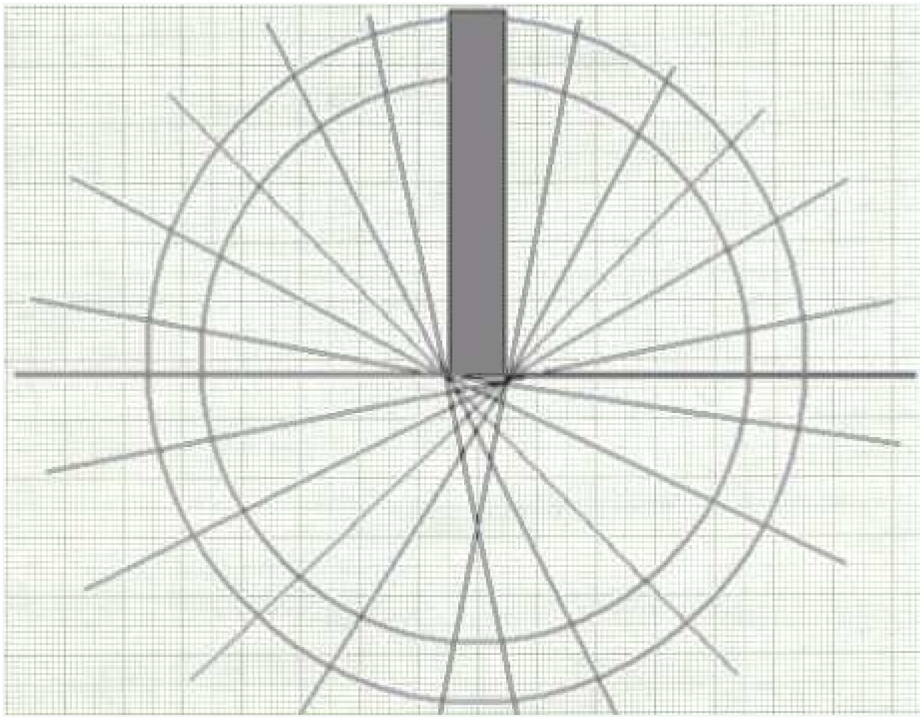
Man behöver bara ange latitud L och längderna a , b , och c i figuren. Man behöver inte bry sig om omvandling av grader till radianer osv., allt sådant sköter kalkylarken automatiskt. Kalkylarken ger värden för x , y och u som du använder för att rita tidlinjerna enligt mallen ovan. Också visarens dimensioner räknas, man kan ange dess längd (och experimentera med olika längder tills man är nöjd).

Konstruktion av urtavlan

Från kalkylarken är det lätt att ta ut resultaten och rita t.ex på en millimeterpapper. Från pappret överförs linjerna sedan till det slutgiltiga underlaget, varför du bör välja en tillräcklig stor ark, och rita redan från början i slutgiltig skala. I praktiken räcker det att rita ena halvan av figuren, då den är helt symmetrisk i östlig och västlig riktning. Rita gärna tidlinjer också för delar av timmar, t.ex en tidmarkering per 15 min, kanske lite kortare linjer allt efter tycke och smak, men beakta att skuggan når till linjen även när solen står högst upp på himmelen.

Timvisarens ovansida ska vara i vinkel exakt lika med ortens latitud från den horisontella timskivan och monteras exakt vertikalt längs kl. 12 linjen. Timvisarens ovansida avses vara plan med vassa kanter, inte avrundad. En avrundad ovansida skulle bara ytterligare krångla till beräkningarna. Ändå är skuggan aldrig helt skarp beroende på naturlagar gällande ljusets utbredning, solens diameter osv., vilka sätter en praktisk gräns på noggrannheten i alla fall. I princip kan man nå en noggrannhet på ca. 5 minuter som bäst när det gäller avläsning av sann soltid, om man varit ytterst noga med konstruktion och montering. Det är dock inget precisionsinstrument vi bygger här, och det finns ytterligare astronomiska faktorer som påverkar tidsvisningen (mer om det längre fram).

Tidmarkeringarna på urtavlan har förstås en viss tjocklek, men har i praktiken föga påverkan på noggrannheten av tidavläsningen. Tidvisarens tjocklek måste dock tas hänsyn till, om den inte är alldeles tunn. Det är nämligen visarens östkant som kastar skuggan på urtavlan till kl 6 på morgonen, och västkant efter kl 18 på kvällen. På morgonen efter kl. 6 och hela förmiddagen är det västkanten som ger skuggan och på eftermiddagen är det åter östkanten. Det blir alltså fyra olika lägen, och timtavlan måste delas i fyra delar och överlappas öst och västsidan för dagtid, och för kvällstimmar separeras, motsvarande timvisarens tjocklek. Se bilden nedan, som visar hur urtavlan graveras för en tjock visare.



Monteringen är mycket kritisk för rätt tidsangivelse. Soluret skall installeras helt horisontellt samt så att tidvisaren pekar rakt åt norr. Det mest praktiska sättet är att använda vattenpass för att ställa uret horisontellt i alla led, samt rikta soluret så att tiden blir rätt ett visst timslag på en solig dag (men använd soltiden, hur den beräknas förklaras längre fram), och man slipper således att använda kompassen (i stället blir uret en praktisk kompass).

Det kan verka lockande att vrida uret något för att ställa det i officiell tid, men det ska man inte göra. Då stämmer nämligen inte skalan dygnet runt och året om. Man kunde kanske korrigera den beräknade skalan för att visa normaltid, men inte riktigt i alla hänseenden, det skulle nämligen bli lite kalenderberoende i alla fall (se om tidsekvationen nedan). Man ska acceptera att ett solur visar lokal sann soltid och ingenting annat, det är liksom det som är det fina med det. Den är som regel högst en halvtimme ifrån normaltiden (+1 timme därtill för sommartid).

Tidskorrigeringar och tidsomvandlingar

Det som är viktigt att veta och förstå är skillnaden mellan normaltid (som vanliga klockor visar) och sann soltid (som soluret visar). Det som följer här är inte allting nödvändiga kunskaper för att bygga eller använda ett solur, men kan svara på några undringar hur det hela hänger ihop astronomiskt sett.

Atmosfärisk ljusbrytning

Ljuset böjer sig när det passerar genom atmosfärens skikt och påverkar solens skenbara position. Detta ger noll avvikelse till tiden om soluret placeras på Nordpolen. På andra breddgrader påverkar det något vid soluppgång och solnedgång, mest nära ekvatorn, men på våra höga breddgrader är avvikelsen ganska liten. (Man ska inte blanda ihop detta med det att solens uppgång och nedgång påverkas av atmosfärisk ljusbrytning rätt påtagligt. Då talar vi om solens skenbara position gentemot horisonten, och inte om solens skenbara position i öst-västlig riktning som tidsangivelsen hänger på.)

Jordaxelns lutning

Jordaxelns lutning påverkar också här. Solen på himlen följer skenbart en bana kallad ekliptikan, som ligger i ca 23 graders vinkel mot ekvatorn, men tiden räknas efter solens astronomiska position gentemot ekvatorplanet. Denna solens rektascension växer och minskar ojämnt genom året beroende på att ekliptikans plan inte sammanfaller med ekvatorplanet, och detta medför en variation i tidmätning av ca. 1 minut under året. Det har således knappast någon praktisk betydelse för konstruktion av ett solur, men jag tar upp det, för att detta leder diskussionen till olika typer av astronomiska koordinater. Koordinaterna är nödvändiga om man t.ex vill rikta ett teleskop mot ett givet objekt på himlen.

Ekvatorialsystemet

Inom astronomin menas med "rektascension" himlakroppens läge i öst-väst-riktning längs ekvatorn, där nollpunkten är vårdagjämningspunkten, nära stjärnbilden Väduren (Capricorn). Vanligtvis anges rektascension i timmar, av hävd och för att det är praktiskt, ett fullt jordvarv motsvarar ju 24 timmar. Den andra koordinaten här heter "deklination", som är höjden från ekvatorplanet angiven som en vinkel. Dessa är koordinaterna i ekvatorialsystemet och de är oberoende av orten, vilket är nödvändigt för astronomiska tabeller som ska kunna användas överallt. Här måste man dock sedan förvandla koordinaterna till lokala positioner på himlen, om man sedan gör det själv eller om instrumentet gör det automatiskt.

Horisontsystemet

Om man vill ge himlakroppens position gentemot den lokala horisonten, då använder man horisontalsystemet. Himlakroppens läge i öst-västlig riktning längs horisonten kallas för "azimut" och nollpunkten väljs vanligtvis i rakt sydlig riktning (men också andra alternativ förekommer). Höjden från horisonten kallas för "altitud", men ibland ser man ordet "elevation" i stället. Båda dessa koordinater brukar anges i grader. Det är också intressant att notera att astronomers nollpunkt i tiden av dygnet, dvs. när det astronomiska dygnet börjar, är mitt på dagen när solen står rakt i söder, alltså kl 12 lokal soltid. Det är också av gammalt hävd, solens middagspunkt var någonting som kunde direkt mätas genom att med instrument följa solens läge.

Det finns därtill fler koordinatsystem som används inom astronomin beroende på situationen, galaktiska koordinater till exempel. Detta ämne tog jag upp för att det ibland är nyttigt att känna till sådant när man bläddrar i almanackan eller i astronomiska tabeller.

Jordbanans elliptiska form

Jordbanans elliptiska form påverkar på så sätt att vår vanliga tid, normaltid, är en sk. medelsoltid. Mätt gentemot stjärnorna roterar Jorden ett varv runt sin axel på 23 timmar 56 min 4 sek, vilket kallas siderisk dygn eller stjärndygn. Vår vanliga dygn på 24 timmar är ingalunda ett jordevarv utan det är ett soldygn: skillnaden mellan två tidpunkter då solen står högst på himlen. Jorden hinner nämligen vandra en bit på sin bana under ett dygn, och måste rotera runt sin axel en liten bit till för att Solen ska hamna i samma läge. Därför är soldygnet nästan 4 minuter längre än det sideriska dygnet.

Jordens hastighet på sin något elliptiska bana runt Solen varierar under året och påverkar på så sätt också soldygnets längd. Eftersom man vill att en timme ska vara lika lång året om räknas längden av en timme ur medelsoldygnet som är ett medelvärde över ett helt år av soldygnslängderna. Den sanna solens, som det så förträffligt heter när det gäller tidsberäkningar, rörelse på himlen är således något ojämn. Man kan korrigera för detta med en term kallad tidsekvationen för att få ortens medelsoltid istället för ortens sanna soltid. Därtill måste man korrigera med ortens tidskillnad från normaltiden:

normaltiden = sann soltid tidsekvationen + tidsskillnaden.

Bortsett från sommartidens extra timme kallas den officiella tiden "svensk normaltid" (den har också kallats "borgerlig tid" med en äldre terminologi). Man ska nu också komma ihåg att sommartiden är normaltiden + 1 timme (från slutet av mars till slutet av oktober).

sommartiden = sann soltid tidsekvationen + tidsskillnaden + 1

Omvänt får man sann soltid från ekvationer:

sann soltid = normaltiden tidsskillnaden + tidsekvationen

eller

sann soltid = sommartiden 1 tidsskillnaden + tidsekvationen.

Nu finns här två termer som man måste känna till för att få fram normaltiden från den tiden soluret visar: tidsskillnaden och tidsekvationen. Dessa tarvar en kort förklaring var.

Tidskillnaden

Tidsskillnaden kan enkelt beräknas för vilken ort som helst: 15 grader i longitud motsvarar tidsskillnad 1 timme, och svensk normaltid (tidskillnad 0) motsvarar longitud (breddgrad) 15, kallad Sveriges tidsmeridian. Ta breddgraden för orten från en karta och beräkna först avvikelse i grader från svensk tidsmeridian (longitud 15), väst är plus och öst är minus. Tidskillnad i timmar från svensk normaltid:

tidsskillnad = (ortens avvikelse i grader från svensk tidsmeridian) / 15

Multiplicera med 60 för att få det i minuter. Göteborgs longitud ligger 3 grader väster om Sveriges tidsmeridian och tidsskillnaden blir +12 minuter. Stockholm ligger 3 grader öster om samma meridian, och tidsskillnaden där blir således 12 minuter, räknad från svensk normaltid, vilket är samma som medeleuropeisk dito.

Sveriges (och mellaneuropas) tidsmeridian går genom Karlshamn, Eksjö, Motala, Nora, Leksand och Östersund, passerar en bra bit öster om Prag, samt nuddar toppen på vulkanen Etna i Sicilien. Den motsvarar en tidskillnad på 1 timme från den officiella världstiden UTC. I breddgrader ligger Sveriges tidsmeridian 15 grader öster om den internationella 0-meridianen, som 1884 bestämdes vara den som passerar tornet i Greenwich Observatorium i England.

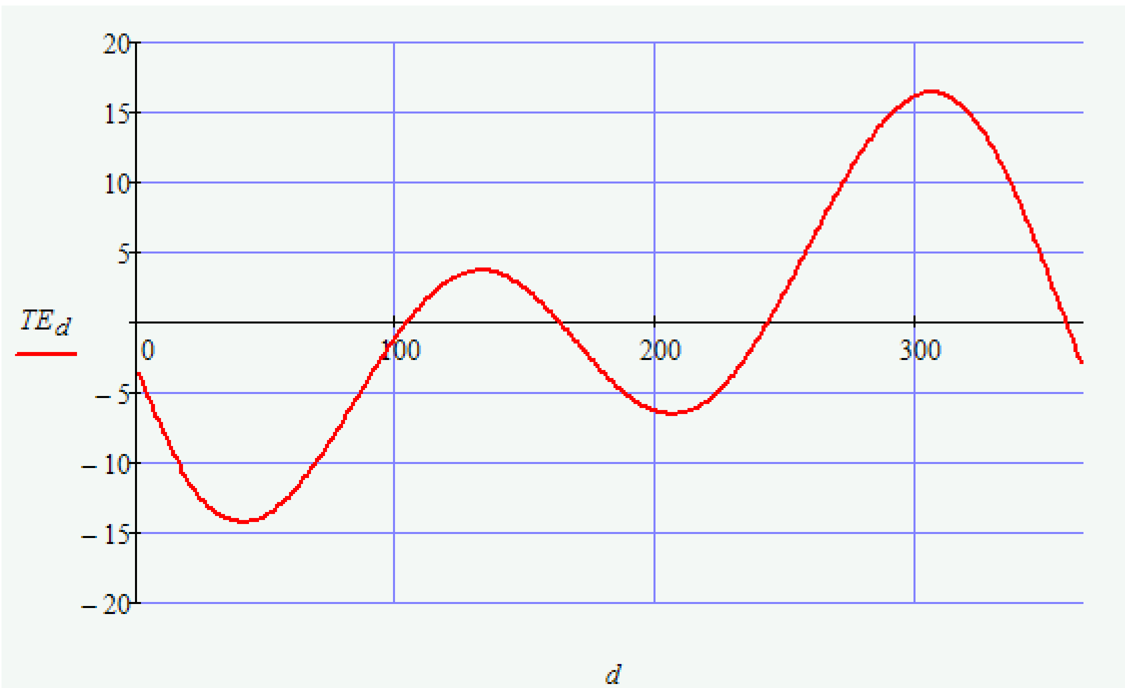
Obs! den internationella standardtiden kallas UTC sedan 1972. Den är ingen bestämd förkortning av någonting, utan en kompromiss och anpassning till flera språk. En minnesregel för en engelskkunnig kunde vara "Universal Time Coordinate", på svenska kallad "koordinat tiden". Tidigare hette det GMT, från engelska "Greenwich Mean Time", som baserades på astronomiska mätningar. Den metoden visade sig för inexakt för satellitkommunikationens behov, så numera är det atomur som gäller.

Tidsekvationen

Det brukar fortfarande kallas för "tidsekvation", ett gammalt begrepp som kommer från latinet och kan låta svårbegripligt. Det som avses är tidsutjämning, omräkning från solens ojämna skenbara rörelse på himlen till en jämn tidsgång. Den skulle kräva avancerade astronomiska kalkyler att räkna fram, men den finns som tur angiven i astronomiska almanackor färdigräknad i form av en tabell. Den anger avvikelsen av medelsoltiden från den sanna soltiden, och kan bli drygt 16 minuter som max. De största avvikelserna faller på senhösten och på vintern, men på sommaren rör det sig om bara några få minuter. Det är tur det, för det är på sommaren man mest har användning till ett solur. Således kan man ofta i praktiken bortse från denna något krångliga korrigering av tidsomvandlingarna.

Varför är då avvikelsen störst på vinterhalvåret? Jo, jordens bana runt Solen är en aning elliptisk, och Solen ligger inte i mitten utan en bit ifrån, i ena brännpunkten av ellipsen (se skolgeometrin). Det råkar vara så att Jorden kommer närmast Solen på sin bana just då norra halvklotet har vinter. Solens dragningskraft är större på närmare håll och Jorden snabbar på lite extra på sin bana, och börjar bromsas upp på motsvarande sätt när den passerat punkten som ligger närmast Solen ("perihelium" i almanackan). Soluret går först före och sedan går det efter ett tag. På sommarhalvåret längre borta från Solen bromsas Jorden något när den närmar sig punkten som är längst borta från solen ("abhelium"), och accelererar något igen när den vänt och börjat åter närma sig Solen. Men eftersom den är då längre borta är Solens dragningskraft något svagare, och Jordens banrörelse blir jämnare, och soluret går jämnare. Avvikelsen från medelsoltiden blir således mindre markant på sommaren.

Nedan tidsekvationen grafisk i minuter för varje dag under ett år, dagnummer från 1 till 365. Tidsekvationen varierar lite från år till år beroende på olika astronomiska faktorer, också planeterna påverkar jordens bana något, men på ungefär ser den likadan ut:

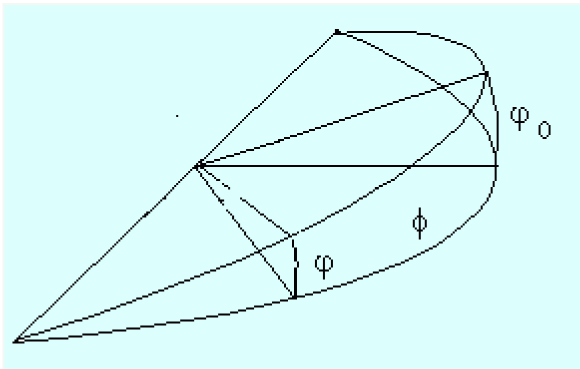


Data till kurvan är hämtad från "Den Svenska Almanackan 2002", utgiven av Almanacksförlaget.

Skuggans längd

Skuggans längd på urtavlan kan beräknas också, fast det kräver svårare matematik (således en teoretisk kapitel för den matematiskt mer insatta). För att inte komplicera det mer än nödvändigt betraktar vi bara visarens skugglängd kl 12 på dagen, och lämnar därhän timvinkeln och solens varierande position under dagen. Vi har då ännu kvar två varierande vinklar att ta hand om: solens skenbara rörelse mot stjärnhimlen i ekvatorialisk riktning under året (dagvinkel), och stjärnhimlens skenbara "vippande" fram och tillbaka mellan vändkretsarna, vilket beror på jordaxelns lutning.

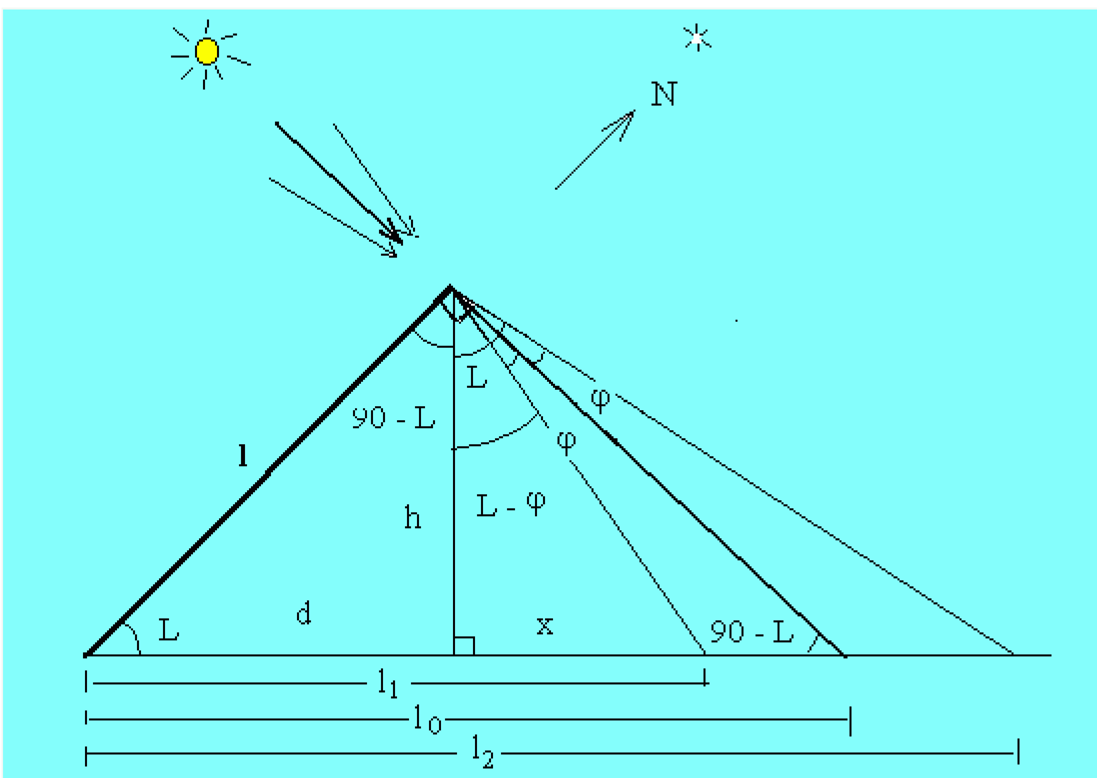
För att få solhöjden som funktion av dagvinkeln använder vi nu en formel från sfärisk geometri.



$$\cos\varphi = \cos\varphi_0 \cdot (\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2$$

Här är φ vinkeln som solhöjden för dagvinkel ϕ avviker från höjden vid dagjämningar, vilket maximalt är lika med jordaxels lutning φ_0 .

Med en dagvinkel menas här en vinkel som anger dagen av året i grader, dvs. den definieras så att det går en full vinkel från 0 till 360 grader under ett år, för att kunna sätta in dagen av året i en trigonometrisk formel.



Från bilden får vi formlerna:

$x_1 = h \cdot tan(L - \varphi)$ $\quad x_2 = h \cdot tan(L + \varphi)$ $\quad d = l \cdot cos\, L$

$l_1 = d + x_1$ $\quad l_2 = d + x_2$ $\quad l_0 = \dfrac{l}{sin\, L}$

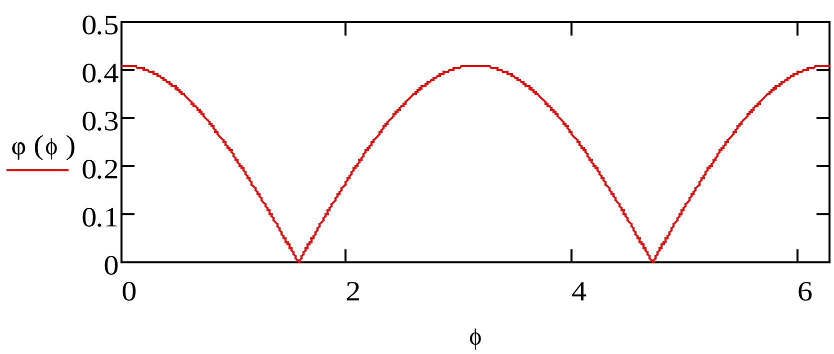
Observera att det fortvarande bara gäller längden av skuggan kl 12 på dagen, såsom i bilden: l_1 gäller vid sommarhalvåret, l_2 vid vinterhalvåret, samt l_0 vid vår- och höstdagjämningar.

Jordaxelns lutning: $\varphi_0 = 23.5\, deg = 0.410152374219 \cdot rad$

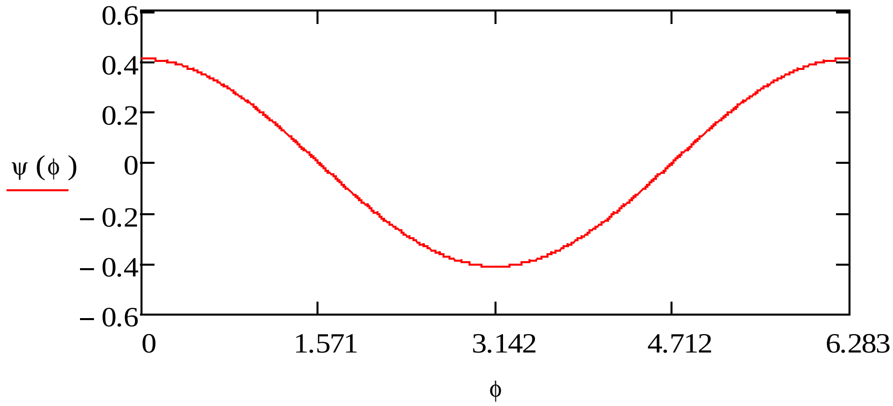
Med en dagvinkel menas en vinkel som anger dagen av året i grader ("deg" med en internationell förkortning), eller radianer, dvs. den definieras så att det går en full vinkel (från 0 till 360 grader eller 0 till 2π radianer) under ett år, nödvändigt att anges så för att kunna sätta in dagen av året i en trigonometrisk formel. Formeln för att beräkna avvikelsevinkeln, ritat i en diagram:

$$\varphi(\phi) = acos\left[cos\, \varphi_0 \cdot (cos\, \phi)^2 + (sin\, \phi)^2\right]$$

Kurvan ser ut så här:



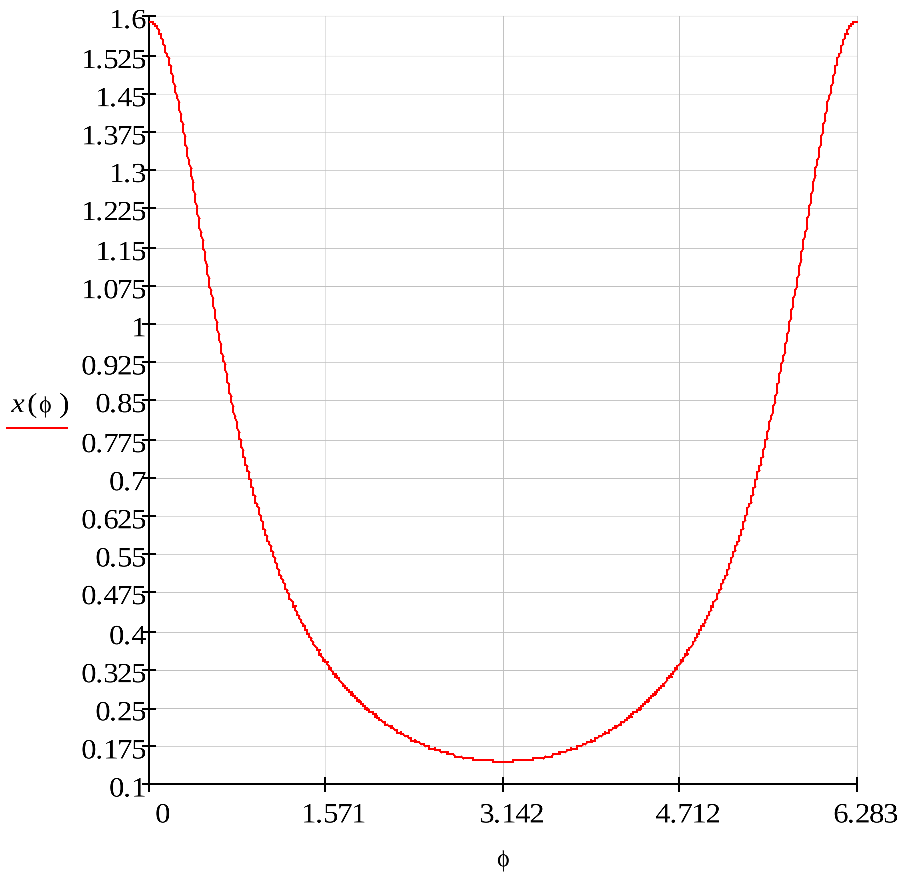
Vi omdefinierar den resulterande avvikelsevinkeln i en ny funktion $\psi(\phi)$ så att den för sommarhalvåret är negativ (vi drar ifrån från dagjämnings skugglängden), då får vi en regelbunden form till kurvan (skalan för ϕ är angiven i radianer):



I följande räknas sommar- och vinterskuggornas längd (i meter), som formler och ritade i en diagram. Antag längden av visaren är 20 cm men vi anger den i meter, och vi är i Stockholm så breddgraden är L = 59,33 fast vi räknar om det till radianer:

$h = 0.20$ $L = 1.0355$ $x(\phi) = h \cdot tan(L + \psi(\phi))$

Här som ett kurvdiagram om skugglängden kl. 12 på dagen. Den vertikala axeln i kurvan är i meter, den horisontella är dagvinkeln i radianer (för att räkna om till kalendariska enheter: ett helt år är här 2 radianer, sommarhalvåret är området mellan 1.57 och 4.71 radianer):



Skuggans längd är inte särdeles intressant på vintern, men på sommaren ger skugglängden mitt på dagen det minsta avståndet dit timlinjerna bör ritas, så att skuggan når dem även runt kl 12 på dagen. På morgonen och kvällen är skuggan mycket längre, och vid soluppgång och nedgång blir den hur lång som helst, detta bara omnämnt här även om vi inte har räknat de

- o -