Digitalteknik

- Talsystem
- Grindlogik
- Koder
- Booles algebra
- Tillämpningar
- Karnaughdiagram

1001001100101100000001011010010

A.Lövdahl

TALSYSTEM

Talsystem är en angivelse på en viss position.
De vanligaste talsystemen i sammanhang med digitalteknik och programmering av PLC system är:

- binära talsystemet
- decimala talsystemet
- oktala talsystemet
- hexadecimala talsystemet

Här beskrivs kort de olika talsystemens karaktär.

Allmänt om talsystem

Alla talsystem bygger på olika vikter och dess symbol samt en bas.

Ex. decimala talet 85. Viktat $\underbrace{8 \cdot \overset{\text{bas}}{10}^{1}}_{80} + \underbrace{5 \cdot 10^{\overset{\text{vikt}}{0}}}_{5} = 85$

80 + 5 = 85

Ex. decimala talet 1274,05

Vikterna (x): 1(3), 2(2), 7(1), 4(0) 0(-1), 5(-2)
Vikten närmast till vänster om decimalkommat har vikten 0, de som följer åt vänster ökar med 1. På andra sidan kommat har vikten –1 och minskar sedan med 1.

I vissa sammanhang anges LSD (Least Significant Digit) och MSD (Most Significant Digit).
Ex. decimala talet 254 LSD=4 (vikten 0) MSD=2 (vikten 2)

Är det fråga om ett binärt tal används LSB resp. MSB (B=bit).

Ibland anger man vilken bas talet har.

Ex. 1011_2 Binärt tal (basen 2)

11_{10} Decimalt tal (basen 10)

Binära talsystemet

Använder sig enbart av ettor (1) och nollor (0).
Dess bas är 2.

Ex. 1011

$$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$8 + 0 + 2 + 1 = 11 \text{ (decimalt)}$$

Talet ovan har 4 bitar. Om alla bitar är 1 (1111), blir det decimala talet 15. Ett 4 bitars binärt tal kan alltså anta värden från 0-15 (16 nivåer) decimalt.

Ex 1100,11

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2}$$

$$8 + 4 + 0 + 0 + 0{,}5 + 0{,}25 = 12{,}75 \text{ (decimalt)}$$

Oktala talsystemet

Använder sig av siffrorna 0,1,2,3,4,5,6 och 7.
Dess bas är 8.

Ex. 124

$$1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$$

$$64 + 16 + 4 = 84 \text{ (decimalt)}$$

Ex. 100

$$1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0$$

$$64 + 0 + 0 = 64 \text{ (decimalt)}$$

Decimala talsystemet

Använder sig av siffrorna 0,1,2,3,4,5,6,7,8 och 9.
Dess bas är 10.

Ex. 568

$$5 \bullet 10^2 + 6 \bullet 10^1 + 8 \bullet 10^0$$

500 + 60 + 8 = 568 (decimalt)

Ex. 25,83

$$2 \bullet 10^1 + 5 \bullet 10^0 + 8 \bullet 10^{-1} + 3 \bullet 10^{-2}$$

20 + 5 + 0,8 + 0,03 = 25,83 (decimalt)

Hexadecimala talsystemet

Använder sig av siffrorna 0,1,2,3,4,5,6,7,8 och 9 samt bokstäverna A,B,C,D,E och F.
Bokstävernas motsvarighet: A=10 B=11 C=12 D=13 E=14 F=15
Dess bas är 16.

Ex. 4AE0

$$4 \bullet 16^3 + 10 \bullet 16^2 + 14 \bullet 16^1 + 0 \bullet 16^0$$

16384 + 2560 + 224 + 0 = 19168 (decimalt)

Sammanställning talsystem

Binärt	Oktalt	Decimalt	Hexadecimalt
0	0	0	0
1	1	1	1
10	2	2	2
11	3	3	3
100	4	4	4
101	5	5	5
110	6	6	6
111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F
10000	20	16	10
10001	21	17	11
10010	22	18	12
10011	23	19	13
10100	24	20	14
1000000	100	64	40
10000000	200	128	80
11001000	310	200	C8
11111001111	3717	1999	7CF

Matematik binära tal

Addition

$$
\boxed{\begin{array}{c} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 10 \\ 1 + 1 + 1 = 11 \end{array}}
$$

Ex.

$$
\begin{array}{r} 1010 \\ \underline{+0010} \\ 1100 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 1010 \\ \underline{+0011} \\ 1101 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 1011 \\ \underline{+0011} \\ 1110 \end{array}
$$

Subtraktion

$$
\boxed{\begin{array}{c} 0 - 0 = 0 \\ 1 - 0 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \\ 10 - 1 = 1 \end{array}}
$$

Ex.

$$
\begin{array}{r} 100 \\ \underline{-10} \\ 10 \end{array}
$$

$$
\begin{array}{r} 1101 \\ \underline{-110} \\ 111 \end{array}
$$

Förenklad subtraktion

Ex (tidigare).	1011	1:a talet
	-110	2:a talet
	101	
Förläng till 6 bitar	001011	
	000110	
Bilda ettkomplement till 2:a talet	000110	
1 blir 0 0 blir 1.		
	111001	Ettkomplement ”falskkomplement”
Addera en 1 till ettkomplementet.	111001	
	+000001	
	111010	Tvåkomplement ”sannkomplement”
Addera 1: talet med tvåkompl.	001011	
	+111010	
	~~1~~000101	~~1~~ anger att svaret är positivt.
		Om det blir en 0:a är svaret negativt.
Svar	101	

Sammanfattning	1011	
	-110	
	111001	Ettkomplement
	+000001	Addera en 1
	111010	Tvåkomplement
	+1011	1:a talet
	~~1~~000101	~~1~~ anger positivt svar
	101	Svar

Multiplikation

$$0 \bullet 0 = 0$$
$$0 \bullet 1 = 0$$
$$1 \bullet 0 = 0$$
$$1 \bullet 1 = 1$$

Ex.

```
    111
   •101
    111
   000
 +111
 100011
```

Ex.

```
    11001
    •1011
    11001
   11001
  00000
+11001
100010011
```

Division

Ex. 100111 / 11

```
      1101
 11 | 100111
      -11
        11
       -11
         01
        -00
          11
         -11
          00
```

Omvandling av tal

Från decimalt till binärt

Ex. 23_{10}

Division	Kvot	Rest
23 / 2	11	1
11 / 2	5	1
5 / 2	2	1
2 / 2	1	0
1 / 2	0	1

$1\ 0\ 1\ 1\ 1_{2}$

Från decimalt till oktalt

Ex. 169_{10}

Division	Kvot	Rest
169 / 8	21	1
21 / 8	2	5
2 / 8	0	2

$2\ 5\ 1_{8}$

Från decimalt till hexadecimalt

Ex. 11583_{10}

Division	Kvot	Rest
11583 / 16	723	15
723 / 16	45	3
45 / 16	2	13
2 / 16	0	2

$2\ D\ 3\ F_{16}$

Från decimalt till binärt

Ex. $14{,}75_{10}$

Division	Kvot	Rest
14 / 2	7	0
7 / 2	3	1
3 / 2	1	1
1 / 2	0	1

$1\ 1\ 1\ 0\ ,\ 1\ 1_2$

Multiplik	Bråkdel	Heltal
0,75 • 2	0,5	1
0,5 • 2	0,0	1

Från hexadecimalt till decimalt

Ex. $176F_{16}$

$$1 \bullet 16^3 + 7 \bullet 16^2 + 6 \bullet 16^1 + 15 \bullet 16^0$$

$$4096 + 1792 + 96 + 15 = 5999 \text{ (decimalt)}$$

Från binärt till decimalt

Ex. 10011011_2

$$1 \bullet 2^7 + 0 \bullet 2^6 + 0 \bullet 2^5 + 1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^3 + 0 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^1 + 1 \bullet 2^0$$

$$128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 155 \text{ (decimalt)}$$

KODER

I många olika sammanhang används olika former av koder för binära tal. Man grupperar binära tal i grupper som vid bl a. överföring gör det till ett bättre system. I PLC system används denna metod för t ex. överföring till olika buffertminne. Man kan på så vis enklare överföra tal t ex. ett 16-bitars register med hjälp av en hexadecimal kod etc.

Olika typer av koder:
- BCD-kod
- EXCESS-3-kod
- 2421-kod / AIKEN-kod
- 2 av 5-kod
- ASCII-kod
- GRAY-kod

BCD-kod

BCD = Binary Coded Decimal. Kallas även 8421-kod.

Ett decimalt tal görs om i 4-bitarsgrupper för varje siffra.

Ex.	16	
BCD –kod	0001	0110
Binärt	10000	

Ex.	2861			
BCD –kod	0010	1000	0110	0001
Binärt	101100101101			

Tabell från decimal till BCD-kod.

Decimalt	BCD-kod
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

EXCESS-3-kod

Koden som avser att ”öka med 3”. Denna kod är ej en positionskod., (ej viktad).

Ex. Decimala talet 8_{10}

Öka med 3

8 + 3

$1000 + 0011 = 1011_{EXCESS}$

ASCII-kod

Används framförallt i datorer. Tabellen nedan visar en vanlig (engelsk) ASCII-kod (7 bitar).

	0	1	2	3	4	5	6	7
0				0	@	P	´	p
1			!	1	A	Q	a	q
2			”	2	B	R	b	r
3			#	3	C	S	c	s
4			$	4	D	T	d	t
5			%	5	E	U	e	u
6			&	6	F	V	f	v
7			´	7	G	W	g	w
8			(	8	H	X	h	x
9			)	9	I	Y	i	y
A			*	:	J	Z	j	z
B			+	;	K	[	k	{
C			,	<	L	\	l	|
D			-	=	M	]	m	}
E			.	>	N	^	n	~
F			/	?	O	_	o	

Ex. G

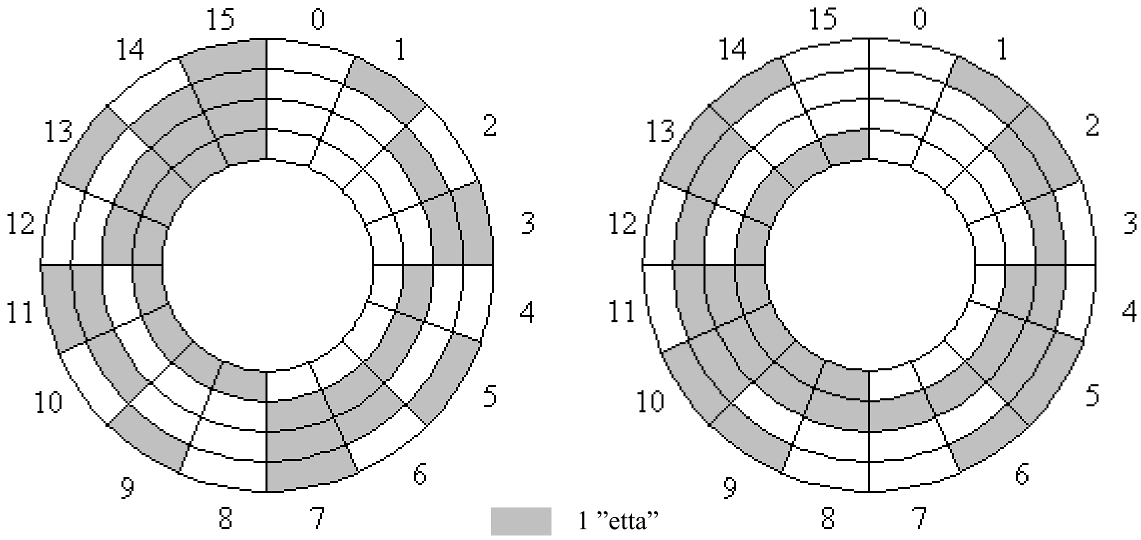
1000111

100 0111

Kolumn 4 Rad 7

GRAY-kod

Denna kodning används t ex. vid avläsning av en vinkel i t ex. vinkelgivare.



Binärkodad 4 bitar *GRAY-kodad 4 bitar*

MSB=Närmast centrum LSB=I periferiet

Fördelen med GRAY-kod är att endast en bit i taget ändrar värde. Detta ökar säkerheten vid ”avläsning”.

Omvandling från GRAY-kod till decimalt tal.

Vikterna för GRAY-kod: 15 7 3 1

Ex. 1010

+15 0 -3 0 = 12_{10} (decimalt)

Ex. 1110

+15 -7 +3 0 = 11_{10} (decimalt)

Varannan vikt som ej ger 0 byter tecken till minus.

Från decimalt till GRAY-kod

Ex.

4 decimalt. 7 -3 ger 0110

12 decimalt. 15 -3 ger 1010

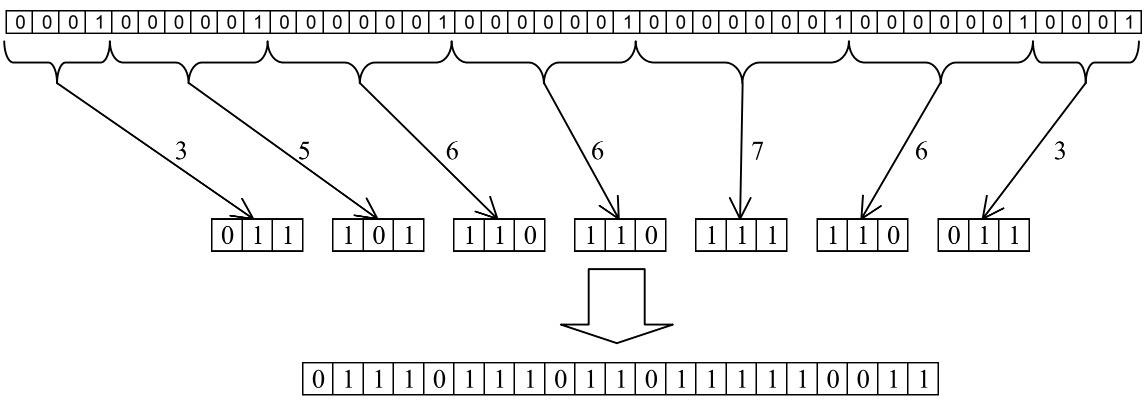
Tabell för binärkod resp. GRAY-kod.

Vinkel	Binär	GRAY
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Komprimering av data

Man komprimerar ofta digitala signaler för att öka snabbhet och prestanda. Nedan ges ett exempel på en metod att komprimera data.

Ex. Följande binära tal komprimeras m a p antalet nollor i följd.



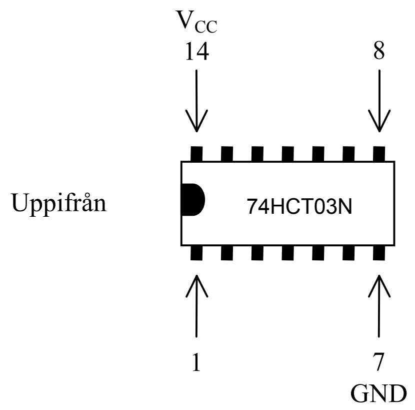
Varje ”3-bit” representerar alltså antalet nollor i en följd.

GRINDAR

I digitaltekniken används olika typer av grindar. En grind har en speciellfunktion som då dess villkor är uppfyllt ”öppnar”.

Olika typer av grindar:
- AND
- OR
- NOT
- NAND
- NOR
- EX OR
- EX NOR

Olika utförande finns. Den vanligaste är IC:n här med 14 ben.

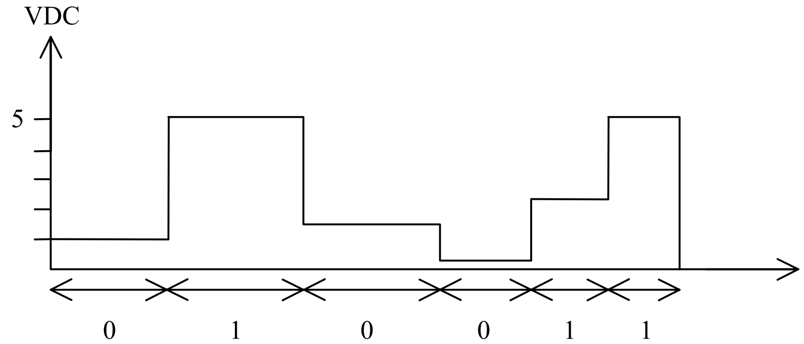


74HCT03N
QUAD, 2-input NAND
med öppen kollektor.

Matningsspänningen är olika för olika typer. IC:n ovan har matningsspänningen 4,5-5,5VDC.

Nivåer på etta (1) och nolla (0).

Logisk etta har i denna kretsen en spänning på 2,4-5,5 VDC
Logisk nolla har i denna kretsen en spänning på 0-0,7 VDC



AND (OCH)

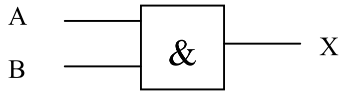
Logiskt uttryck

X=A•B

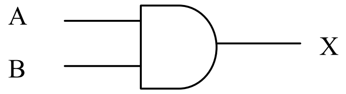
Sanningstabell

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbol



IEC-standard



Amerikansk

Utgången X blir aktiv (1) om båda ingångarna (A och B) är aktiva (1). Grinden utför en logisk multiplikation och ger således en logisk produkt.

OR (ELLER)

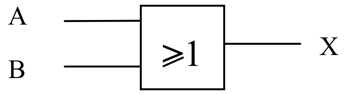
Logiskt uttryck

X=A+B

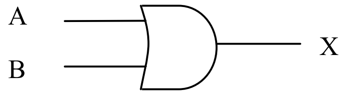
Sanningstabell

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Symbol



IEC-standard



Amerikansk

Utgången X blir aktiv (1) om någon av ingångarna (A eller B) är aktiva (1). Grinden utför en logisk addition och ger således en logisk summa.

NOT (ICKE)

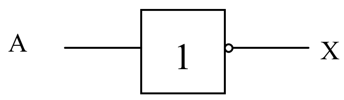
Logiskt uttryck

$X=\overline{A}$

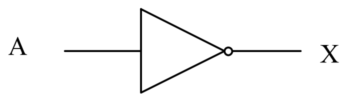
Sanningstabell

A	X
0	1
1	0

Symbol



IEC-standard



Amerikansk

Utgången X blir aktiv (1) om ingången (A) är inaktiv (0) och vise versa. Grinden utför en invertering av signalen.

NAND (INTE OCH)

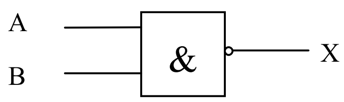
Logiskt uttryck

$X=\overline{A \bullet B}$

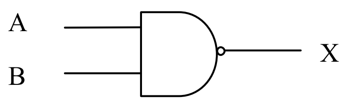
Sanningstabell

A	B	X
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symbol



IEC-standard



Amerikansk

Utgången X blir inaktiv (0) om båda ingångarna (A och B) är aktiva (1). Grinden utför en logisk multiplikation och inverterar utsignalen.

NOR (INTE ELLER)

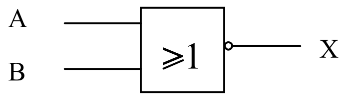
Logiskt uttryck

$X=\overline{A+B}$

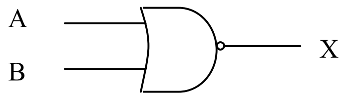
Sanningstabell

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Symbol



IEC-standard



Amerikansk

Utgången X blir aktiv (1) om båda ingångarna (A och B) är inaktiva (0). Grinden utför en logisk addition och inverterar utsignalen.

X-OR (EXLUSIVT-ELLER)

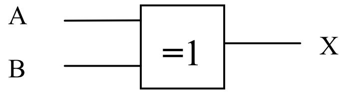
Logiskt uttryck

$X=A\oplus B$

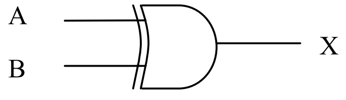
Sanningstabell

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Symbol



IEC-standard



Amerikansk

Utgången X blir aktiv (1) om endast en ingång (A eller B) är aktiva (1).

X-NOR (EXLUSIVT INTE ELLER)

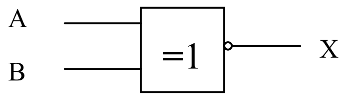
Logiskt uttryck

$X=\overline{A \oplus B}$

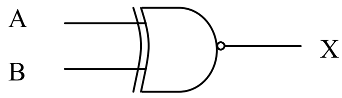
Sanningstabell

A	B	X
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Symbol



IEC-standard

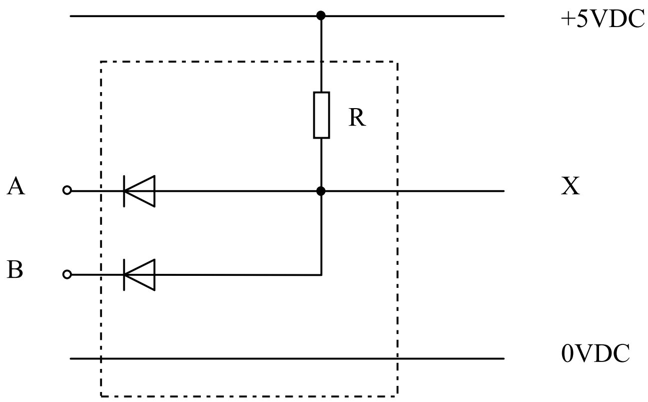


Amerikansk

Utgången X blir aktiv (1) om båda ingångarna (A och B) är aktiva (1) eller inaktiva (0).

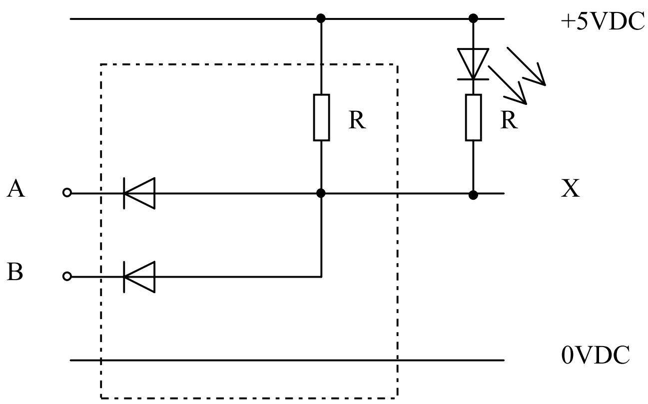
AND (OCH) GRIND I REALITETEN

Nedan visas en typisk AND-krets uppbyggnad



Om båda ingångarna är höga, alltså +5VDC leder de 2 dioderna ej ström. Potentialen på utgången X blir +5VDC.

Lysdiod ansluten till utgången X



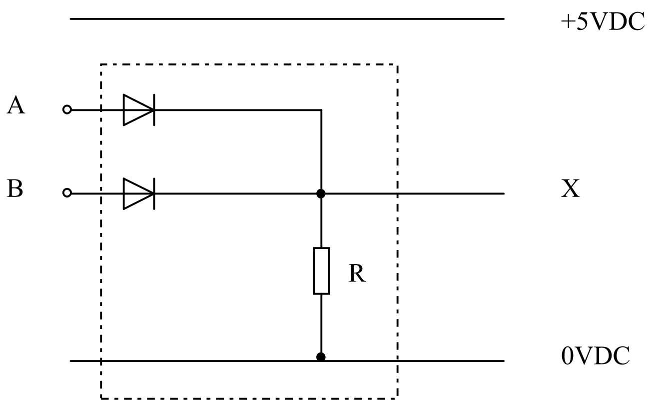
Lysdioden kommer att leda (avge ljus) då någon av de 2 ingångarna är låga (0VDC).

Om båda ingångarna är höga (+5VDC) kommer lysdioden att vara släckt.

I detta fallet måste man ”tänka” inverterat för att den skall fungera som en ren AND-krets.

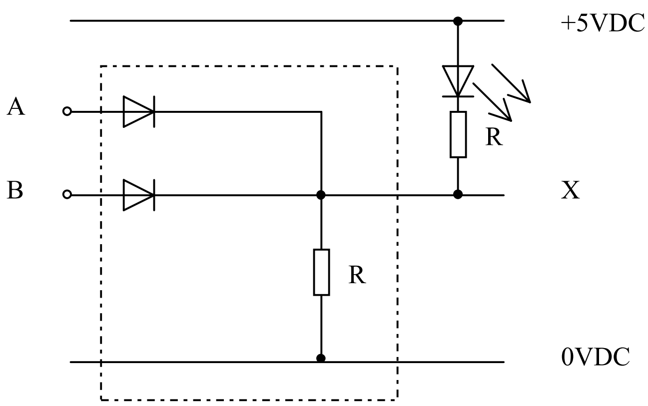
OR (ELLER) GRIND I REALITETEN

Nedan visas en typisk OR-krets uppbyggnad



Om någon av ingångarna är hög, alltså +5VDC kommer en ström att gå genom R till 0VDC (jord). Potentialen på utgången X blir +5VDC.

Lysdiod ansluten till utgången X



Lysdioden kommer att leda (avge ljus) då båda ingångarna är låga (0VDC). Om båda eller någon av ingångarna är hög (+5VDC) kommer lysdioden att vara släckt.

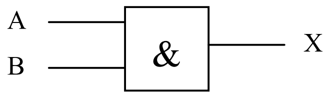
I detta fallet måste man ”tänka” inverterat för att den skall fungera som en ren OR-krets.

TILLÄMPNINGAR

Vi skall i detta avsnitt exemplifiera några enkla tillämpningar. Vi kommer att använda IEC-standard tillsvidare. ELFA-katalogen använder Amerikans standard.

KRETS TILL SANNINGSTABELL

Vi har en given koppling och skall konstruera en sanningstabell.

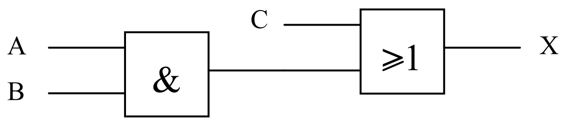


X=A•B

Sanningstabell (4 tillstånd 2^2)

A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Den logiska ekvationen är: X=A•B. Här är det fråga om en OCH-krets (AND).



X=(A•B)+C

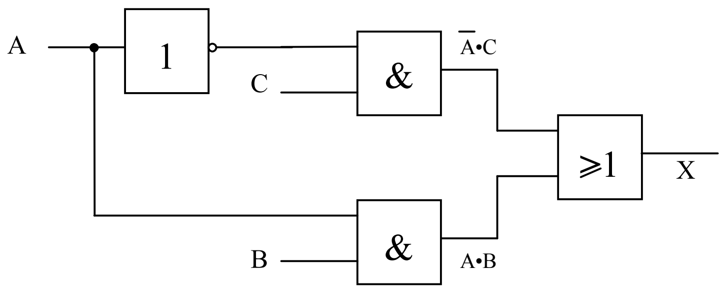
Sanningstabell (8 tillstånd, 2^3)

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Den logiska ekvationen är: X=(A•B)+C. Här har OCH-kretsens utgång kopplats till en ELLER-krets. På den andra ingången på ELLER-kretsen finns signalen C.

Man kan i ord tolka kretsen så här: X är aktiv om A och B är höga.
X är också aktiv om enbart C är hög.

Med en mening: A och B eller C.



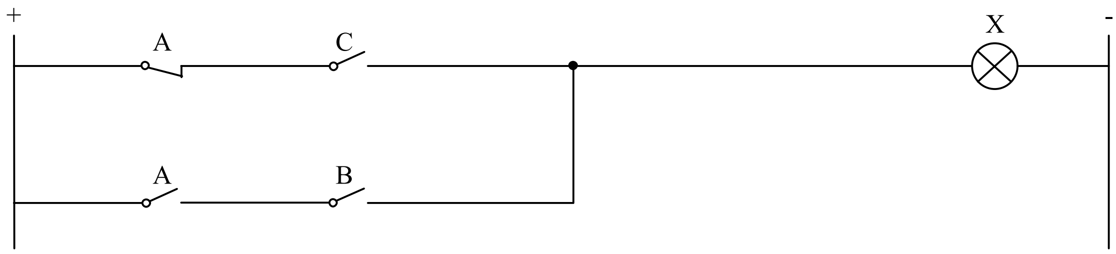
$X = (\overline{A} \bullet C) + (A \bullet B)$

Sanningstabell

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Den logiska ekvationen är: $X = (\overline{A} \bullet C) + (A \bullet B)$. Vi kan tolka kretsen som: För att X skall bli hög måste A och B vara höga eller C hög och A låg.

Ekvivalent reläschema.



SANNINGSTABELL TILL KRETS

Vi skall nu gå från en sanningstabell till en färdig krets.

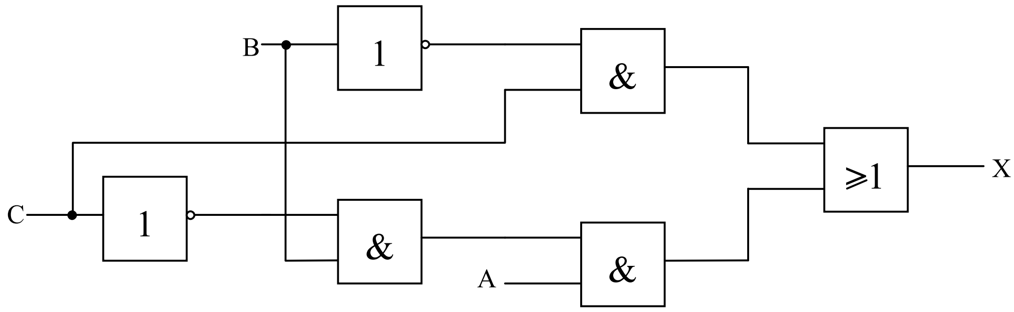
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Vi studerar utgången X.
Vilken logisk ekvation representerar denna funktion? Man kan efter en del träning lösa ut ekvationen direkt i en sådan här enkel tabell. Vi skall nu tillämpa Booles algebra.

Logisk ekvation:
$\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet C + A \bullet \overline{B} \bullet C + A \bullet B \bullet \overline{C}$ vi förenklar
$\overline{B}(\overline{A} \bullet C + A \bullet C) + A \bullet B \bullet \overline{C}$ vi förenklar
$\overline{B} \bullet C + A \bullet B \bullet \overline{C}$

Lösning: $X = \overline{B} \bullet C + A \bullet B \bullet \overline{C}$

Logikkrets



Pröva att konstruera ett ekvivalent reläschema för exemplet ovan.

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Vi studerar utgången X.
Vilken logisk ekvation representerar denna funktion? Denna ekvation kanske är lite besvärligare. Vi tillämpar Booles algebra.

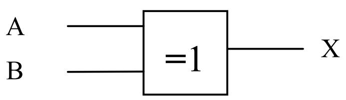
Logisk ekvation:
$\overline{A}\bullet B\bullet\overline{C}+\overline{A}\bullet B\bullet C+A\bullet\overline{B}\bullet\overline{C}+A\bullet\overline{B}\bullet C$
$\overline{A}(B\bullet\overline{C}+B\bullet C)+A(\overline{B}\bullet\overline{C}+\overline{B}\bullet C)$
$\overline{A}(B(\overline{C}+C))+A(\overline{B}(\overline{C}+C))$
$\overline{A}(B\bullet 1)+A(\overline{B}\bullet 1)$
$\overline{A}\bullet B+A\bullet\overline{B}$

Lösning: $X=\overline{A}\bullet B+A\bullet\overline{B} = A \oplus B$

Vi ser nu att C inte används i den förenklade ekvationen, den är alltså ”onödig”.

Ekvationen representerar en känd grindtyp, nämligen X-OR.
Man klarar ekvationen med en 2-ingångars X-OR grind. Jämför denna enkla krets med den ursprungliga ekvationen. Pröva att konstruera ett ekvivalent reläschema för ekvationen.

Logikkrets



LAGAR OCH MODELLER (Booles[1] Algebra)

Det finns givna lagar för olika funktioner. För OR och AND grindar gäller följande.

Axiom

OR	AND
$0 + 0 = 0$	$1 \bullet 1 = 1$
$1 + 1 = 1$	$0 \bullet 0 = 0$
$0 + 1 = 1 + 0 = 1$	$1 \bullet 0 = 0 \bullet 1 = 0$
INV	
$0 = 1$	$1 = 0$

Innehållet i tabellen ovan har en finess.
Om man tar första ekvationen i OR kolumnen och inverterar 1:orna och skiljetecken får man den ekvation som står till höger i AND kolumnen. Pröva med de andra.

Detta kan man ha nytta av vid förenklingar och utnyttjande av tillgängliga kretsar. Man kan alltså använda en OR-grind som en AND-grind (ev. med en inverterare).

Logiska lagar för en variabel

L1	$X + X = X$	L5	$X \bullet X = X$
L2	$X + \overline{X} = 1$	L6	$X \bullet \overline{X} = 0$
L3	$X + 1 = 1$	L7	$X \bullet 1 = X$
L4	$X + 0 = X$	L8	$X \bullet 0 = 0$
		L9	$\overline{\overline{X}} = X$

Kommentarer
Lag 2: Ger en 1:a oavsett om X är låg eller hög.
Lag 3: Ger en 1:a oavsett om X är låg eller hög eftersom vi har en konstant 1:a.
Lag 6: Ger en 0:a oavsett om X är låg eller hög.
Lag 8: Ger en 0:a oavsett om X är låg eller hög eftersom vi har en konstant 0:a.

Nu jämför vi de 2 tabellerna med några exempel för att se om lagarna är korrekta.

L1.	$X + X = X$	Stoppa in axiom för OR rad 1.	$0 + 0 = 0$
L4.	$X + 0 = X$	Stoppa in axiom för OR rad 3.	$1 + 0 = 1$
L6.	$X \bullet \overline{X} = 0$	Stoppa in axiom för AND rad 3.	$1 \bullet 0 = 0$

[1] George Booles, Eng 1815-1864

Logiska lagar för flera variabler

Som tidigare "kompletterar" vänsterkolumnen med högerkolumnen genom att byta skiljetecken (+ • och • +).

L10a	$X+Y=Y+X$	L10b	$X\bullet Y=Y\bullet X$
L11a	$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$	L11b	$X\bullet(Y\bullet Z)=(X\bullet Y)\bullet Z$
L12a	$X\bullet(Y+Z)=(X\bullet Y)+(X\bullet Z)$	L12b	$X+(Y\bullet Z)=(X+Y)\bullet(X+Z)$
L13a	$X+(X\bullet Y)=X$	L13b	$X\bullet(X+Y)=X$
L14a	$X\bullet Y+\overline{X}\bullet Z=X\bullet Y+\overline{X}\bullet Z+Y\bullet Z$	L14b	$(X+Y)\bullet(\overline{X}+Z)=(X+Y)\bullet(\overline{X}+Z)\bullet(Y+Z)$
L15a	$X+Y\bullet\overline{X}=X+Y$	L15b	$\overline{X}+X\bullet Y=\overline{X}+Y$
De Morgans teorem			
L16a	$\overline{X_1+X_2+X_3\ldots\ldots\ldots\ldots+X_n}=\overline{X_1}\bullet\overline{X_2}\bullet\overline{X_3}\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{X_n}$		
L16b	$\overline{(X_1\bullet X_2\bullet X_3\ldots\ldots\ldots\ldots\bullet X_n)}=\overline{X_1}+\overline{X_2}+\overline{X_3}\ldots\ldots\ldots\ldots\overline{X_n}$		

Exempel:

L13a.

X	Y	X•Y	X+(X•Y)
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

L15b

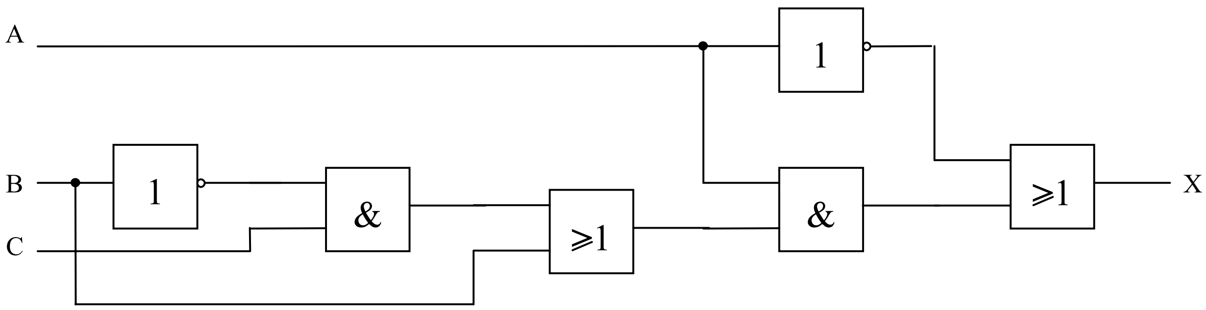
X	Y	$\overline{X}$	XY	$\overline{X}+X\bullet Y$	$\overline{X}+Y$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1

L16b

X	Y	Z	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	X•Y•Z	$\overline{X\bullet Y\bullet Z}$	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0

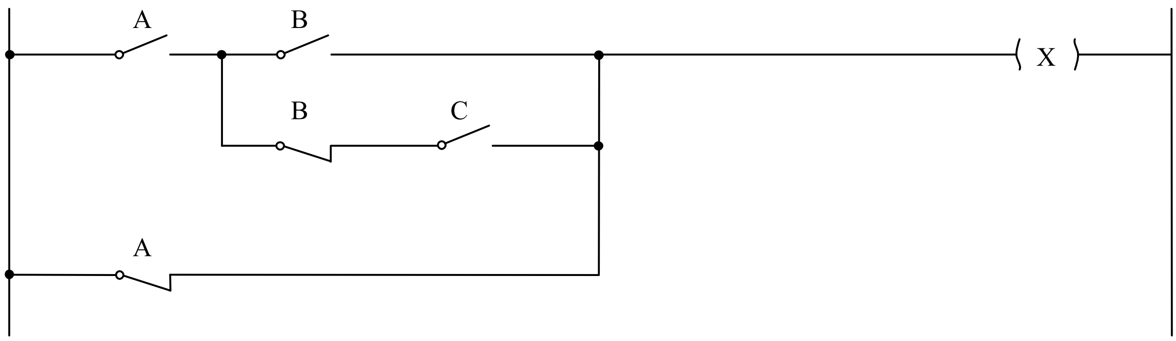
FÖRENKLING AV KRETSAR

Vi har en given krets. Vi skall se om den går att förenkla med hjälp av Booles algebra och de lagar vi har i tabellerna.
Exempel:



Logisk ekvation: $X=A\bullet(B+\overline{B}\bullet C)+\overline{A}$

Ekvivalent reläschema:



L15a $X+Y\bullet\overline{X}=X+Y$ B representerar X C representerar Y

$\underbrace{B+C\bullet\overline{B}}=\underbrace{B+C}$ B och C insatt i L15a.

$X=A\bullet(\overbrace{B+\overline{B}\bullet C})+\overline{A}$ Ursprungliga ekvationen.

$X=A\bullet\overbrace{(B+C)}+\overline{A}$ Ersättning

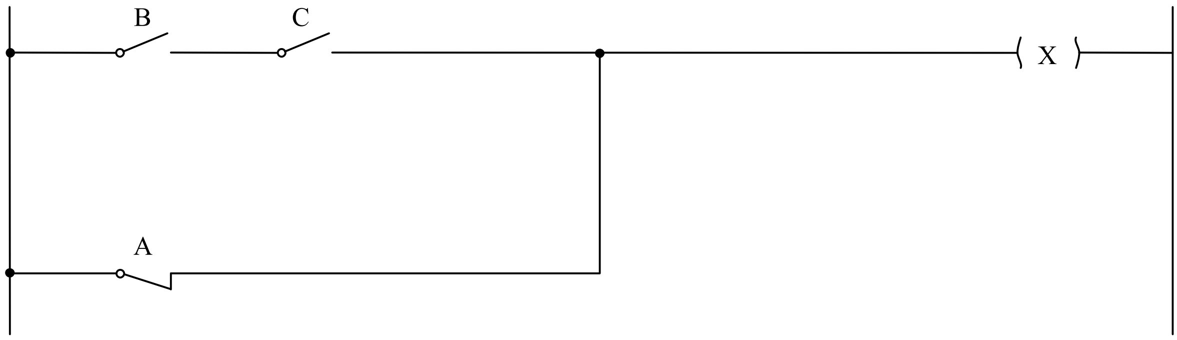
L15b $\overline{X}+X\bullet Y=\overline{X}+Y$ A representerar X (B+C) representerar Y

$\underbrace{\overline{A}+A\bullet(B+C)}=\underbrace{\overline{A}+(B+C)}$ A och (B+C) insatt i L15b.

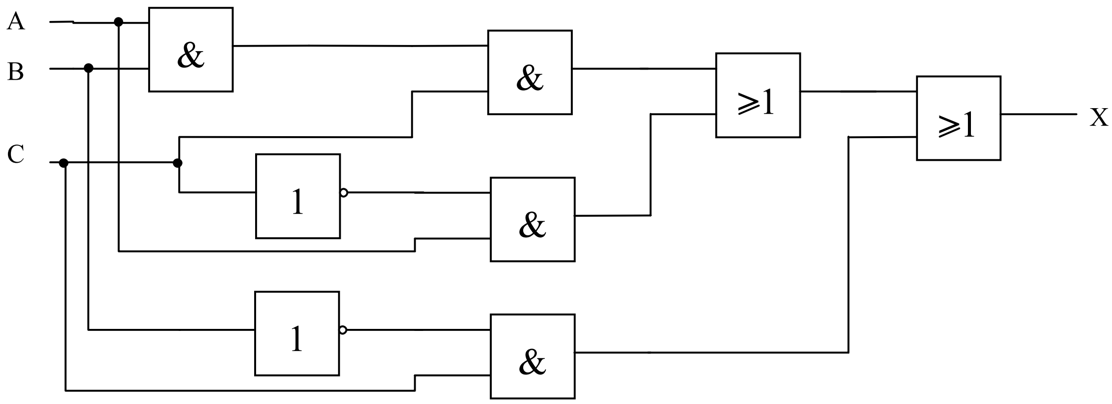
$X=\overbrace{A\bullet(B+C)+\overline{A}}$ Tidigare förenklade ekvation.

$X=\overline{A}+(B\bullet C)$ Förenklad fullt ut.

Förenklat reläschema:



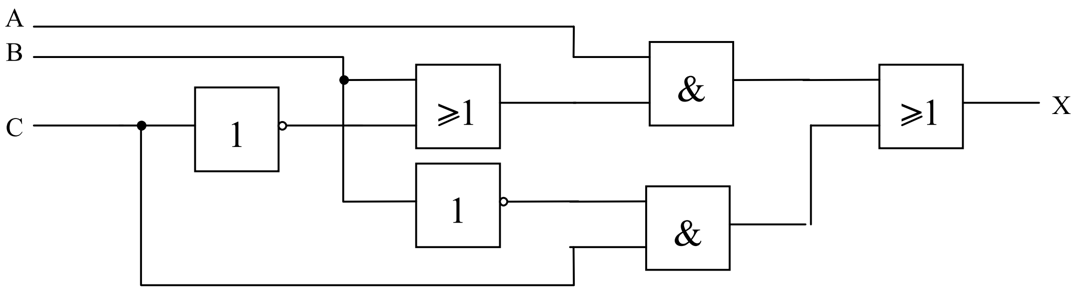
Exempel:



Logisk ekvation: $X=(A \bullet B \bullet C)+(A \bullet \overline{C})+(\overline{B} \bullet C)$

$X=A(B \bullet C+\overline{C})+\overline{B} \bullet C$ L12a

$X=A(\overline{C}+B)+\overline{B} \bullet C$ L15b



Förenklad krets

SAMMANFATTNING

Vi kan alltså använda traditionell Booles algebra och de olika lagarna i tabellerna för att förenkla givna kretsar. En kombination av dessa 2 sätt är ofta att rekommendera vid mer komplicerade kretsar.

FÖRENKLING

Den senaste kretsen går att förenkla ytterligare. Vi skall se hur man går till väga.

Logisk ekvation: $X=(A\bullet B\bullet C)+(A\bullet\overline{C})+(\overline{B}\bullet C)$ Ursprung

L14a $X\bullet Y+\overline{X}\bullet Z=X\bullet Y+\overline{X}\bullet Z+Y\bullet Z$ $(X=B \quad Y=C\bullet A \quad Z=C)$

$$X \quad Y + \overline{X} \quad Z \quad = \quad X \quad Y + \overline{X}Z + Y \quad Z$$

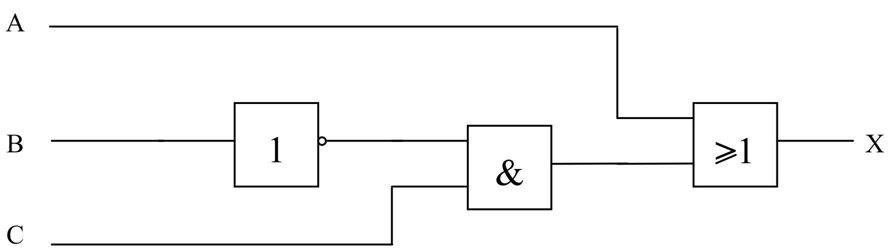
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$X=(B\bullet C\bullet A)+(\overline{B}\bullet C)+(A\bullet\overline{C}) = B\bullet A\bullet C+\overline{B}\bullet C+A\bullet C\bullet C+A\bullet\overline{C} =$$

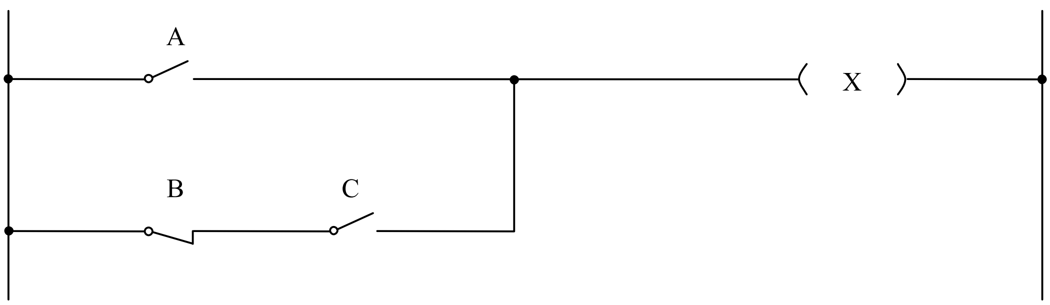
$$A\bullet B\bullet C+\overline{B}\bullet C+A(C+\overline{C}) = A\bullet B\bullet C+\overline{B}\bullet C+A = C(A\bullet B+\overline{B})+A$$

L15b $\overline{X}+X\bullet Y=\overline{X}+Y$ $(X=B \quad Y=A)$ $C(\overline{B}+A)+A = C\bullet\overline{B}+A$

Förenklad krets:



Ekvivalent reläschema:



KONVERTIBEL LOGIK

I detta avsnitt skall vi visa hur man kan göra om ett allmänt grindnät till antingen att enbart använda NAND-grindar eller enbart NOR-grindar.

Det kan vara mycket praktiskt då endast en typ av logikkrets fordras vilket leder till mindre besvär med lagerhållning.

ALLMÄN TEORI ENLIGT dE MORGAN

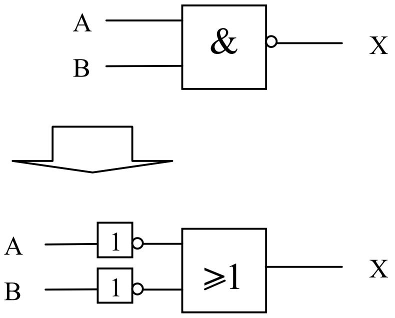
de Morgan

$\overline{X_1 \bullet X_2} = \overline{X_1} + \overline{X_2}$

Ex.

$\overline{A \bullet B}$

$\overline{A} + \overline{B}$

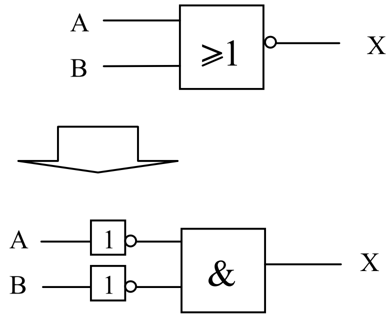


$\overline{X_1 + X_2} = \overline{X_1} \bullet \overline{X_2}$

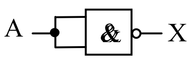
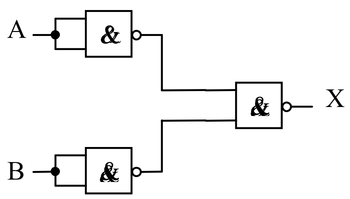
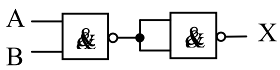
Ex.

$\overline{A + B}$

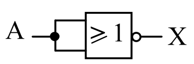
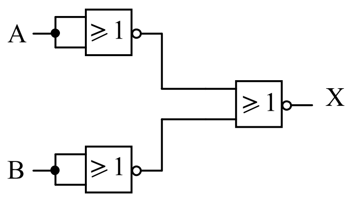
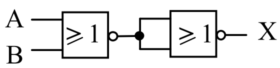
$\overline{A} \bullet \overline{B}$



NAND-grindars tillämpning (de Morgan)

NOT	***OR***	***AND***
		
$X=\overline{A \bullet A}=\overline{A}$	$X=\overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}=A+B$	$X=\overline{\overline{A \bullet B}}=A \bullet B$

NOR-grindars tillämpning (de Morgan)

NOT	***AND***	***OR***
		
$X=\overline{A+A}=\overline{A}$	$X=\overline{\overline{A}+\overline{B}}=A \bullet B$	$X=\overline{\overline{A+B}}=A+B$

Med ovanstående tabeller ser vi att man kan övergå från en logik till en annan. Vi skall nu ta 2 exempel på detta.

FRÅN ALLMÄNT GRIND-NÄT TILL ENBART NAND-GRINDAR

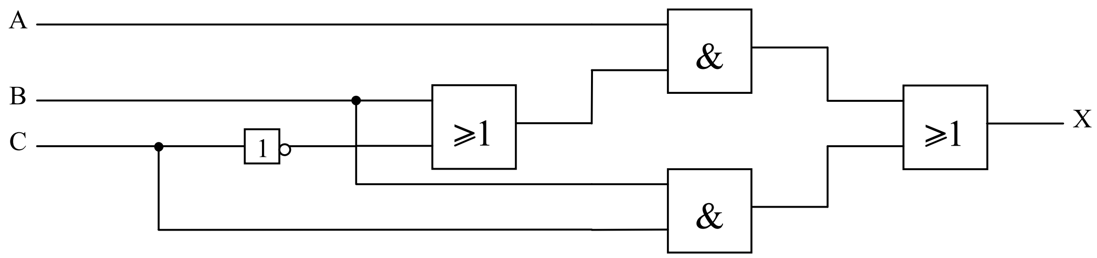
Lagar

Utgångar från AND-grindar inverteras.

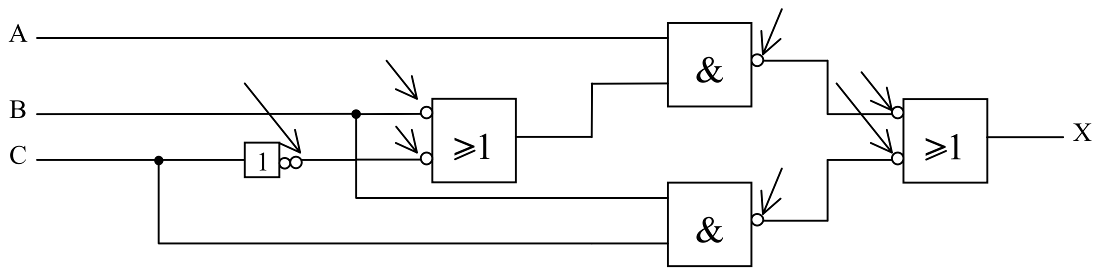
Ingångar på OR-grindar inverteras.

På samma ledning krävs 2 inverteringar.

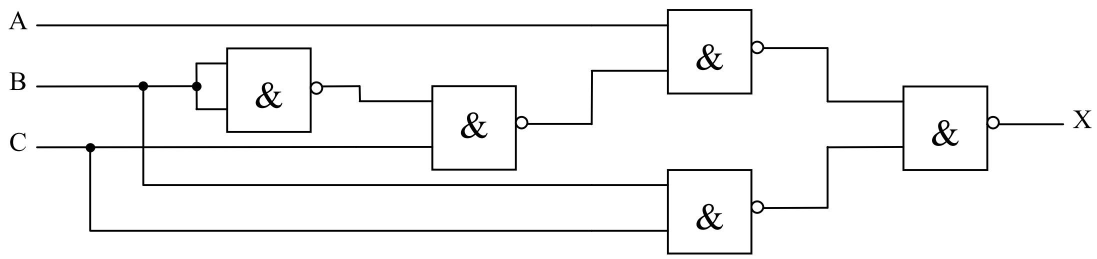
Ex.



Tillämpa lagarna ovan



Tillämpa tabellerna ovan.



Kretsen består nu enbart av NAND-grindar. Det går förmodligen att förenkla denna krets. Det får du göra på egen hand enligt tidigare kunskaper.

FRÅN ALLMÄNT GRIND-NÄT TILL ENBART NOR-GRINDAR

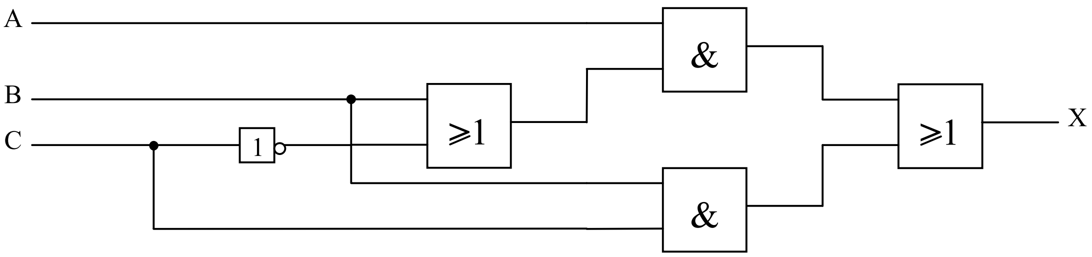
Lagar

Utgångar från OR-grindar inverteras.

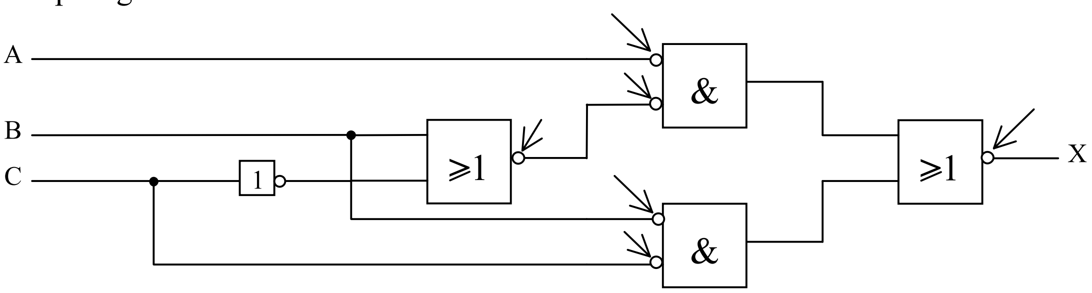
Ingångar på AND-grindar inverteras.

På samma ledning krävs 2 inverteringar.

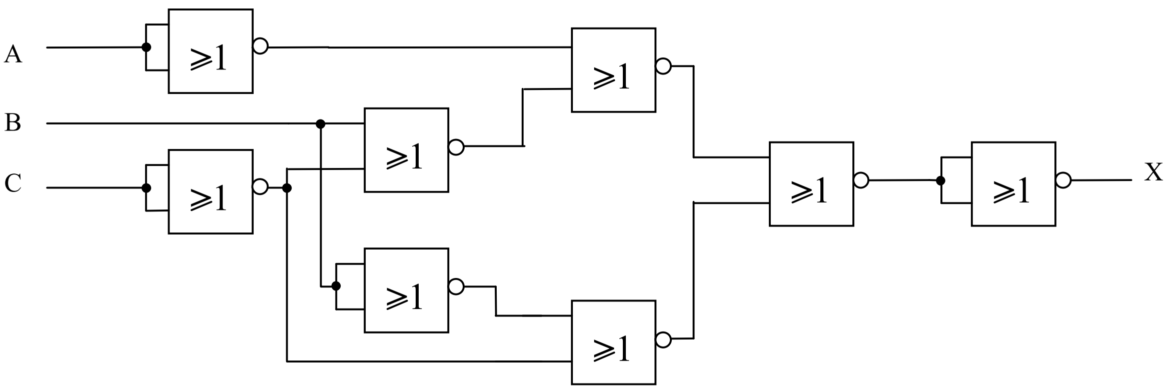
Ex.



Tillämpa lagarna ovan



Tillämpa tabellerna ovan.



Kretsen består nu enbart av NOR-grindar. Det går förmodligen att förenkla denna krets.
Antalet grindar ökade när vi gick över till NOR-grindar.

A.Lövdahl

Sammanfattning

Vid övergång från allmänt grind-nät till enbart NAND-grindar eller enbart NOR-grindar tillämpas följande:

Grind närmast utgång (X) Allmänt nät	*Välj grindtyp*
AND	NOR
OR	NAND

Från allmänt grind-nät till enbart NAND-grindar

Lagar

Utgångar från AND-grindar inverteras.

Ingångar på OR-grindar inverteras.

På samma ledning krävs 2 inverteringar.

Från allmänt grind-nät till enbart NOR-grindar

Lagar

Utgångar från OR-grindar inverteras.

Ingångar på AND-grindar inverteras.

På samma ledning krävs 2 inverteringar.

KARNAUGH-DIAGRAM

Karnaugh-diagrammet är en grafisk metod att förenkla logiska ekvationer eller uttryck.

A \ B	0	1
0		
1		

Diagram med 2 variabler.

AB \ C	0	1
00		
01		
11		
10		

Diagram med 3 variabler.

Som man kan se övergår inte variablerna AB i den ordning vi är vana vid. Anledningen är att i Karnaugh-diagram får endast <u>en</u> variabel ändra värde (0   1 , 1   0) varpå man får detta utseénde.

KARNAUGH-DIAGRAM / SANNINGSTABELL

Ex. $X=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}B\bar{C}+A\bar{B}C$

Sanningstabell			
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

AB \ C	0	1
00		1
01	1	
11		
10	1	

TILLÄMPNINGAR

Från en given logisk ekvation t ex. hämtad från en sanningstabell kan man göra förenklingen snabbt och säkert med hjälp av Karnaugh-diagram.

Ex.

$X=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

Om vi tillämpar Booles algebra får vi:

Bryt ut	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}(\bar{D}+D)$
$X+\bar{X}=1$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}(1)$
Resultat	$\boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ D påverkar inte uttrycket.

Vi skall nu göra samma sak men med Karnaugh-diagram.

Uttryckets ursprung:

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

Markera ut i Karnaugh-diagrammet var respektive "sträng" finns med en 1:a.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01				
11				
10				

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$

Efter lite studerande i Karnaugh-diagrammet ser man att D inte påverkar funktionen för det logiska uttrycket.

Enligt Karnaugh-diagram gäller följande: Om en variabel ändrar värde (1 0 , 0 1) vid 2 intilliggande rutor, påverkar denna inte uttrycket, varvid man kan bortse från den.

I Karnaugh-diagrammet ser vi att D går från 0 1 och då kan vi ta bort D ur uttrycket enligt:

$X=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cancel{\bar{D}}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cancel{D}$

$X=\boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ Resultat

Pröva själv med de logiska uttrycken:
1. $X=\bar{A}B\bar{C}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D$
2. $X=\bar{A}BCD+ABCD$

Gör först förenklingen med hjälp av Booles algebra och sedan med Karnaugh-diagrammet.
Kontrollera att de 2 metoderna ger samma svar.

Vi ska nu se hur vi använder Karnaugh-diagrammet vid 3 intilliggande rutor.

Ex. Booles algebra

$X=\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}D+AB\bar{C}D$	
$\bar{A}\bar{C}(\bar{B}D+BD)+AB\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{C}(D(\bar{B}+B))+AB\bar{C}D$
$\bar{A}\bar{C}(D(1))+AB\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{C}D+AB\bar{C}D$
$\bar{C}(\bar{A}D+ABD)$	$\bar{C}(D(\bar{A}+AB))$
$\bar{C}(D(\bar{A}+B))$	$\bar{C}(D\bar{A}+DB)$
$\boxed{\bar{C}D\bar{A}+\bar{C}DB}$ Resultat	Vi får 2 termer.

Vi skall nu göra samma sak men med Karnaugh-diagram.

Vi sätter ut 1:or i de rutor de 3 termerna avser.

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}D+AB\bar{C}D$

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11		1		
10				

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}D+AB\bar{C}D$ Vi ser i Karnaugh-diagrammet att mellan de 2 första rutorna går B från 0 1 . Vi stryker denna variabel i de 2 första termerna.

$\bar{A}\cancel{\bar{B}}\bar{C}D+\bar{A}\cancel{B}\bar{C}D+AB\bar{C}D$

Nästa steg alltså mellan ruta 2 och 3 går A från 0 1 . Vi stryker denna variabel i de 2 sista termerna.

$\bar{A}\cancel{\bar{B}}\bar{C}D+\cancel{\bar{A}}\cancel{B}\bar{C}D+\cancel{A}B\bar{C}D$

Kvar får vi:

$\bar{A}\bar{C}D+\bar{C}D+B\bar{C}D$

Eftersom $\bar{C}D$ ingår i alla 3 termer kan vi stryka den 2:a termen.

$\boxed{\bar{A}\bar{C}D+B\bar{C}D}$ Resultat eller $\bar{C}(\bar{A}D+BD)$

Nu ska vi se hur vi använder Karnaugh-diagrammet med 4 intilliggande rutor.

Ex. Booles algebra

$X=\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD+AB\bar{C}D+ABCD$

$\bar{A}(B\bar{C}D+BCD)+A(B\bar{C}D+BCD)$

$\bar{A}(BD)+A(BD)$

$BD(\bar{A}+A)$

$\bar{A}(BD(\bar{C}+C))+A(BD(\bar{C}+C))$

$\bar{A}BD+ABD$

$\boxed{BD}$ Resultat 1 term

Vi skall nu göra samma sak men med Karnaugh-diagram.

Vi sätter ut 1:or i de rutor de 4 termerna avser.

$X=\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD+AB\bar{C}D+ABCD$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11		1	1	
10				

Analys av de 4 rutorna i Karnaugh-diagrammet ger följande:

Variabel A: Ändrar värde. Påverkar ej.
Variabel B: Är 1:ställd hela tiden.
Variabel C: Ändrar värde. Påverkar ej.
Variabel D: Är 1:ställd hela tiden.

Variablerna A och C kan uteslutas då de ändrar värde och påverkar då inte resultatet.
Kvar får vi variabel B och D vilket ger ett förenklat uttryck:
$\boxed{X=BD}$ Resultat

Vi gör samma sak men på tidigare sätt. Vi arbetar i grupper om 2:

$X=\underbrace{\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD}_{1}+\underbrace{AB\bar{C}D+ABCD}_{2}$

$\underbrace{\bar{A}B\cancel{\bar{C}}D+\bar{A}B\cancel{C}D}+\underbrace{AB\cancel{\bar{C}}D+AB\cancel{C}D}$ 1:C ändrar värde=stryks. 2:C ändrar värde=stryks.

$\cancel{\bar{A}}BD + \cancel{A}BD$ A ändrar värde=stryks.

$\boxed{BD}$ Resultat.

Nu ska vi se hur vi använder Karnaugh-diagrammet med 6 intilliggande rutor.

Ex. Booles algebra

$X=\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+AB\overline{C}\overline{D}+AB\overline{C}D+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}D$

$\overline{C}(\overline{A}B\overline{D}+\overline{A}BD+AB\overline{D}+ABD+A\overline{B}\overline{D}+A\overline{B}D)$

$\overline{C}(\overline{A}B(\overline{D}+D)+AB(\overline{D}+D)A\overline{B}(\overline{D}+D))$

$\overline{C}(\overline{A}B+AB+A\overline{B})$ $\qquad \overline{C}=(B(\overline{A}+A)+A\overline{B})$

$\overline{C}(B+A\overline{B})$ $\qquad$ Lag 15a. $\qquad X+Y\overline{X}=X+Y$

$\overline{C}(B+A)$ $\qquad \boxed{\overline{C}B+\overline{C}A}$ Resultat

Nu prövar vi med att ”läsa” direkt ur Karnaugh-diagrammet.

Vi sätter ut 1:or i de rutor de 6 termerna avser.

$X=\overline{A}B\overline{C}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+AB\overline{C}\overline{D}+AB\overline{C}D+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{C}D$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11	1	1		
10	1	1		

Analys av de 6 rutorna i Karnaugh-diagrammet i grupper om 4:

4 översta rutorna.
Variabel A: Ändrar värde. Påverkar ej.
Variabel B: Är 1:ställd hela tiden.
Variabel C: Är 0:ställd hela tiden.
Variabel D: Ändrar värde. Påverkar ej.

\+

4 nedersta rutorna.
Variabel A: Är 1:ställd hela tiden.
Variabel B: Ändrar värde. Påverkar ej.
Variabel C: Är 0:ställd hela tiden.
Variabel D: Ändrar värde. Påverkar ej.

$\boxed{B\overline{C} \quad + \quad A\overline{C}}$

Vi gör samma sak med på tidigare sätt. Vi arbetar i grupper om 2:

$$X=\underbrace{\overline{A}B\overline{C}\cancel{\overline{D}}+\overline{A}B\overline{C}\cancel{D}}_{\cancel{\overline{A}}B\overline{C}}+\underbrace{AB\overline{C}\cancel{\overline{D}}+AB\overline{C}\cancel{D}}_{\cancel{A}\cancel{B}\overline{C}}+\underbrace{A\overline{B}\overline{C}\cancel{\overline{D}}+A\overline{B}\overline{C}\cancel{D}}_{A\cancel{\overline{B}}\overline{C}}$$

$B\overline{C}$ $\qquad \overline{C}$ $\qquad A\overline{C}$ $\qquad \overline{C}$ stryks då den återfinns i de 2 övriga.

$\boxed{B\overline{C}+A\overline{C}}$

HAMMINGAVSTÅND

Hammingavstånd är en benämning på det avstånd där en variabel ändrar status (0 1,1 0).

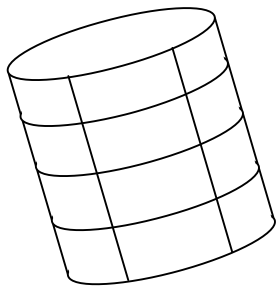
Se 2 exempel nedan.

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01		1	1	
11				1
10				1

Ett Karnaugh-diagram bygger på en ”sluten” cykel både horisontellt och vertikalt. Detta innebär att hammingavstånd även är mellan 2 yttre rutor både horisontellt och vertikalt.

Se 2 exempel nedan.

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	
01				
11				
10	1		1	1



Karnaugh-diagram sett som en sluten cykel. De yttre rutorna ”möter” då varandra.

EXEMPEL PÅ INTILLIGGANDE RUTOR.

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01	1			1
11				
10				

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			
01	1			
11				
10	1			

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11				
10		1	1	

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01				
11				
10	1			1

INTE INTILLIGGANDE RUTOR

Karnaugh-diagrammet är ett utmärkt verktyg även då man har uttryck som gör att rutorna inte ligger intill varandra. Arbetsgången blir att finna lämpliga kombinationer av intilliggande rutor och sedan tillämpa de metoder vi tidigare visat.

Ex.
Vi har enligt t ex. en sanningstabell fått följande uttryck.

$$X=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BCD+\bar{A}BC\bar{D}+A\bar{B}CD+A\bar{B}C\bar{D}$$

Börja med att markera ut 1:or i Karnaugh-diagram för de olika termerna.

Välj lämpliga grupperingar.

Vi väljer att gruppera de 4 1:orna på första raden till en 4-grupp.
De övriga 1:orna gör vi till en 6-grupp.
Sedan kombinerar vi de 2 rutor som ingår i 4-gruppen och 6-gruppen.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	1
11				
10			1	1

$$X=\underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}}_{\text{4-grupp}}+\bar{A}BCD+\bar{A}BC\bar{D}+A\bar{B}CD+A\bar{B}C\bar{D}$$

$$\underbrace{\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}\bar{B}C\bar{D}+\bar{A}BCD+\bar{A}BC\bar{D}+A\bar{B}CD+A\bar{B}C\bar{D}}_{\text{6-grupp}}$$

4-grupp: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$

6-grupp: $\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}C$

$$\underbrace{\bar{A}\bar{B}C\quad\bar{A}\bar{B}C}_{\text{Dessa 2 termer kombineras}}$$

$\bar{A}\bar{B}\cancel{\bar{C}}+\bar{A}\bar{B}\cancel{C}$ $\qquad$ $\bar{A}\cancel{\bar{B}}C+\cancel{\bar{A}}\cancel{B}C+\cancel{A}\bar{B}C$

$\bar{A}\bar{B}$ $\qquad$ $\bar{A}C \quad C \quad \bar{B}C$

Eftersom C redan finns i de 2 andra termerna stryks denna.

Kvar blir uttrycket:

$$\boxed{X=\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C+\bar{B}C}$$

Pröva exemplet ovan med Booles algebra.